情報システム工学科
伊達 章

線型空間 その 3： 一次独立性

今日

4.4 1 次独立と 1 次従属（教科書 p.174 1 次独立性）

先週

1. 部分空間：「和とスカラー倍に関して閉じている」

   $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$： $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が集合 W の元であること

   $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W, \quad k\boldsymbol{u} \in W$

一次結合（線形結合とも言う）：$\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 + \cdots k_r\boldsymbol{v}_r$
教科書 p.168. 例 16

定義

線形空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ を用いて，V の任意のベクトルを 1 次結合として表すことができるとき，ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は線形空間 V を**張る**という.

教科書 p.169. 例 17, 18

例 19 （p.169）

$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ は $\mathcal{R}^3$ を張りうるか.

「$\mathcal{R}^3$ を張りうるか」 とは：
$\mathcal{R}^3$ の任意のベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ が，$\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3$ と書けるか.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} k_1 & +k_2 & +2k_3 & = & b_1 \\ k_1 & & +k_3 & = & b_2 \\ 2k_1 & +k_2 & +3k_3 & = & b_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Longrightarrow A\boldsymbol{k} = \boldsymbol{b}$$

問：A が与えられているもとで，どんな $\boldsymbol{b}$ に対しても解 $\boldsymbol{k}$ があるか.
$\rightarrow A\boldsymbol{k} = \boldsymbol{b}$ を解くことに対応. $\boldsymbol{k} = A^{-1}\boldsymbol{b}$
$\det(A) = 0 \rightarrow$ この例 19 の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ では $\mathcal{R}^3$ を張れない. $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_3$ になっている.
（3 次元空間中の平面に 3 本のベクトルがあるので，これをどう足し合わせようとも，この平面の外にでることはない）

練習問題 4.3　12 番などがお手頃.

4.4　1 次独立性

ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$ を考える.

- 線形独立（1 次独立）
  どのベクトルも他のベクトルの線形結合で表せない. $\rightarrow$ ベクトルの組は 1 次独立.
- 線形従属（1 次従属）
  どれか一つのベクトルが他のベクトルの線形結合で表せる.

教科書の例 21-24 を見ていく.

<u>例題</u>　例 24. (p.175)
次の 3 つのベクトルは線形独立か，それとも線形従属か.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ を考える.

1. $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ （自明な解）のみのとき，線形独立.
2. 自明な解以外の解を持つとき線形従属.

与えられた式と同値なもっとも単純な表現に変形する.

$$\begin{cases} 1k_1 & +5k_2 & +3k_3 & = & 0 \\ -2k_1 & +6k_2 & +2k_3 & = & 0 \\ 3k_1 & -1k_2 & +1k_3 & = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1k_1 & +5k_2 & +3k_3 & = & 0 \\ 0k_1 & +16k_2 & +8k_3 & = & 0 \\ 0k_1 & -16k_2 & -8k_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1k_1 & +5k_2 & +3k_3 & = & 0 \\ 0k_1 & +2k_2 & +1k_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & -16 & -8 \end{matrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{matrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

<u>これが連立一次方程式を解くことに他ならない.</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow ② + 2 \times ①, ③ - 3 \times ① \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & -16 & -8 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

復習： 基本変形

1. ある行に 0 でない数をかける．
2. ある行に他のある行の何倍かを加える．
3. ある行と他のある行を交換する．

与えられた係数行列をよい形（単位行列）に変えることが連立一次方程式を解くことに対応（実は，これはそのまま逆行列を求める計算に使える）．

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3 次の正方行列 A の Rank $A = 2$. $\leftrightarrow |A| = 0 \leftrightarrow A^{-1}$ が存在しない．
<u>自明な解以外の解を持つので $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は線形従属</u>

練習問題 4.4 （p.178）
(a)
(b) 2 次元ベクトルが 3 つある...

2. (a)

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -11 & -4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 99 & 44 \\ 0 & -11 & -4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 99 & 44 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

A^{-1} が存在する． $\rightarrow \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次独立.

<u>4.5 基底と次元</u>

線形空間 $\mathcal{V}$ の元の組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$ が次の 2 つの性質を満たすとき，これを $\mathcal{V}$ の基底と呼ぶ.

- $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$ は 1 次独立
- 任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}^n$ が， これらの線形結合 $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + \cdots c_r\boldsymbol{v}_r$ で表すことができる.