情報システム工学科
伊達 章

線形代数 第 5 回
2006 年 11 月 6 日

線型空間 その 4： 基底と次元

先週

1. 4.4 1 次独立と 1 次従属（1 次独立性，教科書 p.174）

$\boxed{\text{今日}}$： 一見難しい言葉が出てくるが，実体はそうでもない．

1. 4.5 基底と次元
2. 4.6 行列の行空間と列空間； 階数； 基底の構成
3. 4.7 内積空間
4. 4.8 内積空間における「長さ」と「角」

来週

1. 4.9 直交基底； グラムシュミットの方法

4.5 基底と次元

線形空間 $\mathcal{V}$ の元の組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$ が次の 2 つの性質を満たすとき，これを $\mathcal{V}$ の基底と呼ぶ．

- $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$ は 1 次独立
- 任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ が， これらの線形結合 $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + \cdots c_r\boldsymbol{v}_r$ で表すことができる．

定義： 線形空間 $\mathcal{V}$ の次元 （p.185）

$\boxed{\text{線形空間 } \mathcal{V} \text{ の基底を構成する元の個数 } n.\ \dim \mathcal{V} = n \text{ と表す.}}$

4.6 行列の行空間と列空間； 階数； 基底の構成

行列 A の列空間：A の列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ によって張られる空間．

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

行列 A の列空間の次元 （= 行空間の次元）を A の階数（Rank）という．

ランク（階数）

m 本の n 次元ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ を列とする $n \times m$ 行列を $A = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m)$ と書く．
$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ のうち，線形独立なものの個数を行列 A のランク（または階数）と呼ぶ．

定理 13 （教科書 p.193）

$n \times n$ 行列 A に関する次の条件はすべて同値

1. A のランクが n である．
2. 行列式 $|A|$ が 0 でない．$|A| \neq 0$.
3. 逆行列 A^{-1} が存在する．

4.7 内積空間

内積は「内積の公理」を満たせば何でも勝手に定義してよい．
ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を考えよう．

内積の公理：

1. 線形性 $< c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} >= c_1 < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v} > + c_2 < \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} >$
2. 対称性 $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >=< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} >$
3. 正値性 $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} > \geqq 0$, 0 は $\boldsymbol{u} = 0$ のときに限る

※ 公理は内積という演算の満たす性質を規程するだけ．
※ 具体的には $\rightarrow$ 「物理的性質を上手に表現するように」決めればよい．

例 43

$< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ で内積を定義
※ ユークリッド空間の $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= u_1v_1 + u_2v_2$ とは異なる．
※ 上記の公理をすべて満たしている．
※ $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ と書ける（双一次形式）．
ユークリッド空間の内積は $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

4.8 内積空間における「長さ」と「角」

定義： ノルム $||\boldsymbol{x}||$ （ベクトルの長さを一般化したもの）

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >}$$

二つのベクトルのあいだの角度 θ：

$$\cos\theta = \frac{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >}{||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||}$$

$< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= 0 \rightarrow \boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ はたがいに直交するという．($\cos\theta = 0$, つまり $\theta = \pi/2$)