情報システム工学科
伊達 章

線形代数 第 6 回
2006 年 11 月 13 日

線型空間 その 5： 計量と内積

先週

1. 4.5 基底と次元
2. 4.6 行列の行空間と列空間； 階数； 基底の構成

今日 ： 一見難しい言葉が出てくるが，実体はそうでもない．

1. 4.7 内積空間
2. 4.8 内積空間における「長さ」と「角」

来週

1. 4.9 直交基底； グラムシュミットの方法

4.7 内積空間

内積は「内積の公理」を満たせば何でも勝手に定義してよい．
ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を考えよう．

内積の公理：

1. 線形性 $< c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} >= c_1 < \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v} > +c_2 < \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} >$
2. 対称性 $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >=< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} >$
3. 正値性 $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} >\geqq 0$, 0 は $\boldsymbol{u} = 0$ のときに限る

※ 公理は内積という演算の満たす性質を規程するだけ．
※ 具体的には → 「物理的性質を上手に表現するように」決めればよい．

例 43

$< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ で内積を定義
※ ユークリッド空間の $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= u_1v_1 + u_2v_2$ とは異なる．
※ 上記の公理をすべて満たしている．
※ $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ と書ける（双一次形式）．

ユークリッド空間の内積は $< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

4.8 内積空間における「長さ」と「角」

定義： ノルム $||\boldsymbol{x}||$ （ベクトルの長さを一般化したもの）

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} >}$$

二つのベクトルのあいだの角度 θ：

$$\cos\theta = \frac{< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >}{||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||}$$

$< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= 0 \to \boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ はたがいに直交するという．($\cos\theta = 0$, つまり $\theta = \pi/2$)

双一次形式 （教科書には載っていない）

次のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の実数値関数 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を考える．

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} F \boldsymbol{y}$$

意味：二つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を入力すると一つの実数が得られる．
この関数は次のような線形性をもつことがわかる．

$$f(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = c_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + c_2(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$$

$$f(\boldsymbol{x}, c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2) = c_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + c_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$$

このとき関数 f を 双一次形式 という．さらに対称性

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

をもつとき双一次形式 関数 f は対称であるという．双一次形式 関数 f が対称であれば行列 F は対称行列

$$F^{\mathrm{t}} = F$$

である．

例：

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$$

を行列を用いて，例えば以下のように書ける．

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

2 次形式：変数の 2 次の項のみからなる式

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} F \boldsymbol{x}$$

を 2 次形式という．当然，F は対称行列になる．

例：

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

を行列を用いて

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

と書ける．

例：内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は対称な双一次形式

基底が正規直交系の場合，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} E \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{y}$$

内積となるには以下の正値性も必要：

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} G \boldsymbol{x} \geq 0 \text{ 等号は } \boldsymbol{x} = 0 \text{ のときにかぎる}$$

<u>例題</u>：次の 2 次形式をベクトルと対称行列を使い表現せよ.

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 6x_3x_1$$

<u>解答</u>：

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x})$$