情報システム工学科
伊達 章

線形代数 第 7 回
2006 年 12 月 4 日

線型空間 その 5： 計量と内積

前回

1. 4.7 内積空間
2. 4.8 内積空間における「長さ」と「角」

$\boxed{\text{今日}}$： 一見難しい言葉が出てくるが，実体はそうでもない．

1. 4.9 直交基底； グラムシュミットの方法 （教科書 p.212）

来週

1. 1 次変換

4.9 直交基底； グラムシュミットの方法

- 例 53, 例 54

  ベクトルの正規化： $\boldsymbol{x} \Longrightarrow \boldsymbol{x}^*$

  $\boldsymbol{x}$ ：任意のベクトル．
  $\boldsymbol{x}^*$ ：$\boldsymbol{x}$ と同じ向きを持ち大きさが 1 のベクトル

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||}$$

例． $\boldsymbol{x} = (1,2), ||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{5}$

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||} = \boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

確認： 大きさが 1 になっている．

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

正規直交基底 （p.213）
直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ による任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ の表現

$$\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2$$

$$< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 > = < k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 > = k_1 < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 > + k_2 < \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1 > = k_1 < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 > = k_1||\boldsymbol{v}_1||^2$$

係数 k_1 の求め方：$\rightarrow k_1 = \frac{1}{||\boldsymbol{v}_1||^2} < \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 >$

$\boldsymbol{v}_1$ のノルムが 1， $||\boldsymbol{v}_1||^2 = 1$ のときは $k_1 = < \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 >$

つまり，正規直交基底の各基底に対する成分は内積を使って簡単に表現できる（教科書 p.213）

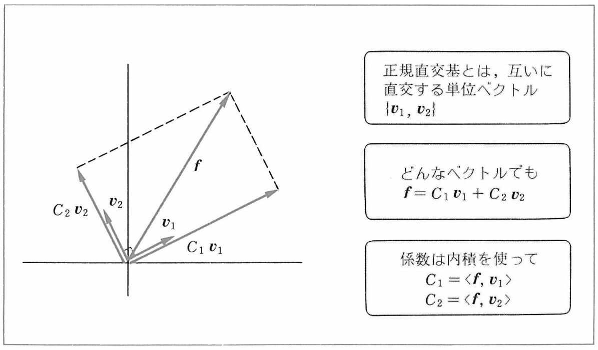


図 3・7 正規直交基でベクトルを表す

与えられたベクトルを直交化しておくと便利.

<u>グラムシュミットの直交化法</u>

2 次元の（簡単な）例.

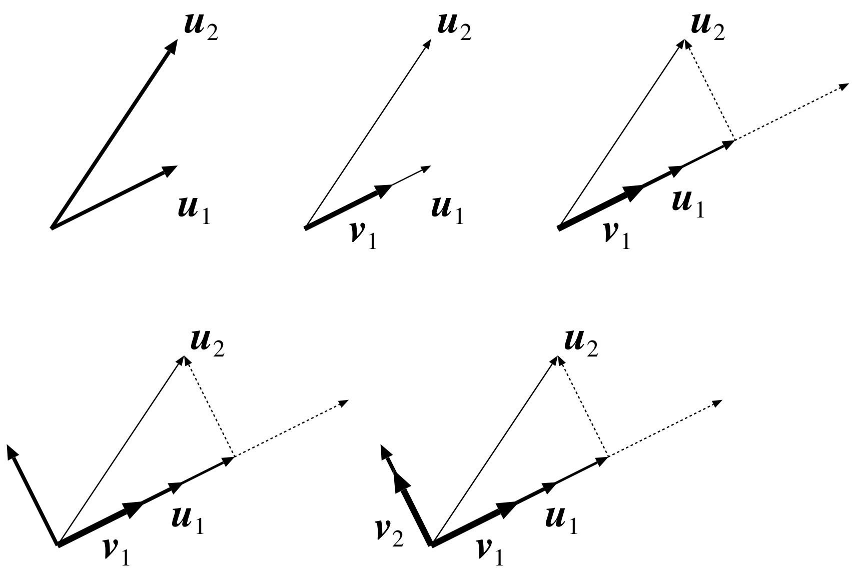
問題： 与えられているもの： 線形独立なベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$,　求めるもの： 正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$.

線形独立なことは分かっているので，互いが直交しており，長さが 1 のベクトルを求める.

1. $\boldsymbol{u}_1 \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \dfrac{\boldsymbol{u}_1}{||\boldsymbol{u}_1||}$
2. $\boldsymbol{u}_2$ の $\boldsymbol{v}_1$ 成分を求める．$< \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 >$
3. したがって $\boldsymbol{u}_2$ の $\boldsymbol{v}_1$ に直交する成分のベクトルは $\boldsymbol{u}_2 - < \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{v}_1$．このノルムを 1 に規格化したのが求める $\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{\boldsymbol{u}_2 - < \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{v}_1}{||\boldsymbol{u}_2 - < \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{v}_1||}$.
4. 3 次元以上の場合も，これと同じことを続けていく.

   $\boldsymbol{u}_3$ の $\boldsymbol{v}_1$ 成分を求める．$< \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 >$
   $\boldsymbol{u}_3$ の $\boldsymbol{v}_2$ 成分を求める．$< \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 >$
   $\boldsymbol{u}_3$ の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に直交する成分のベクトルは $\boldsymbol{u}_3 - < \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{v}_1 - < \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 > \boldsymbol{v}_2$.

   このベクトルのノルムを 1 に規格化したのが求める $\boldsymbol{v}_3$.



練習問題 4.9

8 (a)

$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ で与えられるユークリッド内積をもった $\mathcal{R}^3$ の基底から正規直交基底を作れ.

1. $\boldsymbol{u}_1 \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \dfrac{\boldsymbol{u}_1}{||\boldsymbol{u}_1||}$, $||\boldsymbol{v}_1|| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, $\quad \boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{u}_2$ の $\boldsymbol{v}_1$ 成分を求める. $< \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 >= \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1+1) = 0$

3. $\boldsymbol{u}_2$ の $\boldsymbol{v}_1$ に直交す成分のベクトルは $\boldsymbol{u}_2 - < \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_2$. このノルムを 1 に規格化したのが求める $\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{\boldsymbol{u}_2}{||\boldsymbol{u}_2||} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. $\boldsymbol{u}_3$ の $\boldsymbol{v}_1$ 成分を求める. $< \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 >= \dfrac{1+2+1}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

   $\boldsymbol{u}_3$ の $\boldsymbol{v}_2$ 成分を求める. $< \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 >= \dfrac{-1+2}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   $\boldsymbol{u}_3$ の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に直交する成分のベクトルは

$$\boldsymbol{u}_3 - < \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{v}_1 - < \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 > \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6-8+3 \\ 12-8-3 \\ 6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

   このベクトルのノルムを 1 に規格化したのが求める $\boldsymbol{v}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{1+1+4}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$