情報システム工学科
伊達 章

線形代数 第 10 回
2007 年 1 月 9 日

線形変換の行列の固有値・固有ベクトル

前回までの話

　掃き出し法，連立一次方程式，逆行列，行列式，線形独立性，ランク（階数）
これらの概念が互いにどう関わっているのか各自で整理しておく．

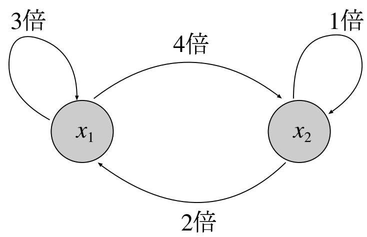
今回の話

線形代数の中心： 固有値，固有ベルトル．これらの意味を例題で理解する．
※ なお，教科書では，いきなり固有値，固有ベクトルの定義と計算から入る．講義では，なぜそういうものを考えないといけないのか，そのおおもとの問題を考える．
【重要な点】ものの見方．物事の表現の仕方と計算の関係． $\Longrightarrow$ 座標変換．　基底変換．
結論： 「物事を固有ベクトル方向に分けて考えると後の話が単純になる」

（もともとの変数）	問	答
	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
（都合のいい変数）	問’ $\longrightarrow$	答’

次回： 直交行列

例： 【問】n 回更新 した後の状態を求めたい



$$\text{初期値 } \boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + 1x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x}^{(0)}$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = A(A\boldsymbol{x}) = A^2\boldsymbol{x}^{(0)}$$

$$\boldsymbol{x}^{(n)} = A^n\boldsymbol{x}^{(0)} \Longrightarrow A^n \text{ が対角行列でないとこの計算は大変}$$

　ここで $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ と変数変換を考え，$\boldsymbol{y}$ で考えてみる．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は 1 対 1 の関係があり，お互いを行き来できるようにするため P は正則（逆行列をもつ）であると考える．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= A\boldsymbol{x} \quad (1) \\ P\boldsymbol{y}' &= AP\boldsymbol{y} \quad (2) \\ \boldsymbol{y}' &= P^{-1}AP\boldsymbol{y} \quad (3) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{y}$ の時間発展が対角行列で表現できるようになれば好ましい．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}' &= \Lambda \boldsymbol{y} && (4) \\ P^{-1}AP &= \Lambda && (5) \\ AP &= P\Lambda && (6) \end{aligned}$$

ここで P は $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ という変換の行列であった．

P を縦ベクトル 2 つを横に並べたものとみて，$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}$，$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ とおくと，この式は

$$\begin{aligned} A\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} && (7) \\ \begin{bmatrix} A\boldsymbol{e}_1 \ A\boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1\boldsymbol{e}_1 \ \lambda_2\boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} && (8) \end{aligned}$$

となり，

$$A\boldsymbol{e}_1 = \lambda_1\boldsymbol{e}_1,\ A\boldsymbol{e}_2 = \lambda_2\boldsymbol{e}_2$$

となる．与えられた行列 A をもとに，この式を満たす $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \lambda_1, \lambda_2$ を求めれば，P, Λ が分かる．$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を固有ベクトル，λ_1, λ_2 を固有値という．ここで $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ という変換の行列であり，逆行列をもたないといけないため，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は線形独立である必要がある．

定義

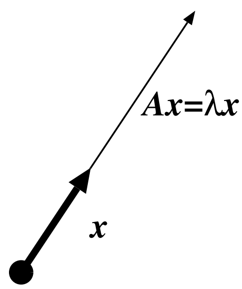
ある n 次元正方行列 A に対して，

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

をみたす n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o})$ と数 λ が存在するとき，

1. λ を 行列 A の固有値
2. $\boldsymbol{x}$ を 固有値 λ に対する固有ベクトル

という．固有ベクトルは，λ が実数のとき，A という行列をかけても方向が変わらないベクトルと解釈できる．



固有値，固有ベクトルの具体的な計算

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \rightarrow\ A\boldsymbol{x} = \lambda E\boldsymbol{x} &\quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ (\lambda E - A)\boldsymbol{x} = 0 &\quad \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ -4 & \lambda - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \\ \text{固有方程式：}\ \phi(\lambda) = |\lambda E - A| = 0 &\quad (\lambda - 3)(\lambda - 1) - 8 = 0 \\ &\quad \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \\ &\quad (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0 \\ \text{固有値} &\quad \lambda = -1, 5 \end{aligned}$$

固有方程式について；$\lambda E - A$ の行列式の値が 0 でないとすると，$(\lambda E - A)^{-1}$ が存在し，$\boldsymbol{x} = 0$ という解をもつことになる．これは $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ に矛盾する．したがって $|\lambda E - A| = 0$ である．この方程式を固有方程式（特性方程式）と呼ぶ．

$$
\begin{array}{rl}
(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = 0 & \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ -4 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \\
\lambda = -1 \text{ の場合} & \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \\
\text{これを満たす } x_1, x_2 \text{が固有ベクトル．例えば} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1 \\
\lambda = 5 \text{ の場合} & \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \\
\lambda = 4 \text{ に対応する固有ベクトル．例えば} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_2
\end{array}
$$

これで必要な値がすべて計算できた．

$$
\boldsymbol{y}' = \Lambda \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{9}
$$

$$
\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{10}
$$

$$
\boldsymbol{y}^{(n)} = \Lambda^n \boldsymbol{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{bmatrix} \boldsymbol{y}^{(0)} \tag{11}
$$

$\boldsymbol{x}$ に戻そう．

$$
\boldsymbol{x}^{(n)} = P\boldsymbol{y}^{(n)} \tag{12}
$$

$$
\boldsymbol{x}^{(0)} = P\boldsymbol{y}^{(0)} \tag{13}
$$

より，

$$
P^{-1}\boldsymbol{x}^{(n)} = \Lambda^n P^{-1} \boldsymbol{x}^{(0)} \tag{14}
$$

$$
\boldsymbol{x}^{(n)} = P\Lambda^n P^{-1} \boldsymbol{x}^{(0)} \tag{15}
$$

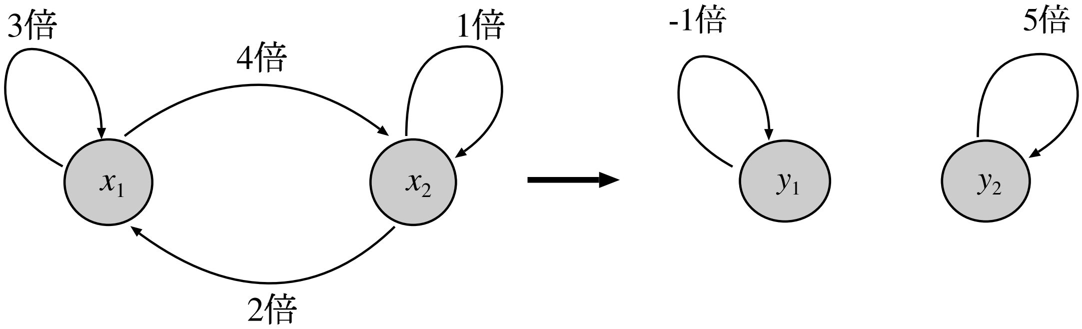
ここで

$$
P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}
$$

である．また，このように $P^{-1}AP = \Lambda$ と対角行列 Λ が得られる．これを行列の対角化と呼ぶ．

問題の本質：基底を取り替えれば扱いやすくなる

このシステムでは $y_1 = (x_1 - x_2)/3, y_2 = (2x_1 + x_2)/3$ という量が本質的．y_1 という量は毎回 (-1) 倍され符合がかわるだけだが，y_2 は時間 1 が経つごとに 5 倍になり，増えていくことがわかる．一般に固有値の大きい固有ベクトルがシステムの振る舞いに効いてくる．



1. 初期値 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ を $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ で y 座標系の表現に変換する．
2. y 座標系で n 乗を計算する．
3. $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ でもとの x 座標系に戻す．

疑問： どうすれば，このような都合のよい変換行列 P が見つかるか．

からくり：行列 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ は，行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ の固有ベクトルを並べたもの．固有ベクトルを基底ベクトルとして用い，物事を表現して考えると便利なことを，これから見ていく．

基底ベクトルによる表現

- $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x}$ を行列 A の固有ベクトル方向に分けて考えてみる．
  $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P\boldsymbol{y}$
- 次の時刻での状態を考えよう．
  $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} = A(y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2) = y_1 A\boldsymbol{e}_1 + y_2 A\boldsymbol{e}_2 = y_1\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\lambda_2\boldsymbol{e}_2$
  $A\boldsymbol{e}_1$ は $\lambda_1\boldsymbol{e}_1$ となり，もはや行列とベクトルの掛け算などと言わなくてもいい．
- $\boldsymbol{y}(n) = \Lambda^n \boldsymbol{y}(0)$
- $\boldsymbol{x}(n) = P\boldsymbol{y}(n) = P\Lambda^n\boldsymbol{y}(0) = P\Lambda^n P^{-1}\boldsymbol{x}(0) = A^n\boldsymbol{x}(0)$
  したがって $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$ と表現できることがわかる．

行列の対角化

$n \times n$ 行列 A が，n 個の異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ をもち，それぞれの固有値に対する固有ベクトルが $\boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2, \cdots$ のとき，行列 $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \cdots \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix}$ を用いて，行列 A は以下のように対角化できる．

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

1. 対角行列の対角成分は，すべて固有値になる．

いままでの話は,「調子のよい偶然の結果」．たまたま固有値が実数でしかもすべて異なっていた．一般には，固有値は複素数で，しかも重根の場合がある．

固有値が複素数だと，固有ベクトルも複素ベクトルになってしまい，固有方向を λ 倍するといっても，なんとことやら困ったことになる．これについては次回．