情報システム工学科
伊達 章

線形代数 第 11 回
2007 年 1 月 15 日

ジョルダン標準形，直交変換とその性質

今日の目標

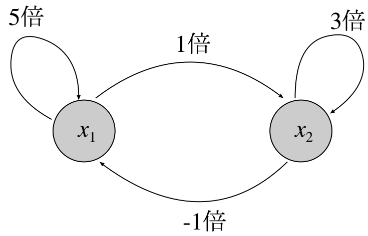
固有値が重解をもつ場合の扱い（ジョルダン標準形）
固有値が複素数値になる場合（特に，回転，鏡映）
直交行列とは

次回： 二次形式の固有値

前回までの話

線形変換の固有値，固有ベクトル．
物事を固有ベクトル方向に分けて考えると後の話が単純になる．

例題： n 回更新 した後の状態を求めたい



$$\text{初期値}\ \boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x}^{(0)}$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = A(A\boldsymbol{x}) = A^2\boldsymbol{x}^{(0)}$$

$$\boldsymbol{x}^{(n)} = A^n\boldsymbol{x}^{(0)} \Longrightarrow A^n\ \text{が対角行列でないとこの計算は大変}$$

ここで $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ と変数変換を考え，$\boldsymbol{y}$ で考えてみる．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は 1 対 1 の関係があり，お互いを行き来できるようにするため P は正則（逆行列をもつ）であると考える．

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} \tag{1}$$
$$P\boldsymbol{y}' = AP\boldsymbol{y} \tag{2}$$
$$\boldsymbol{y}' = P^{-1}AP\boldsymbol{y} \tag{3}$$

$\boldsymbol{y}$ の時間発展が対角行列で表現できるようになれば好ましい．

$$\boldsymbol{y}' = \Lambda\boldsymbol{y} \tag{4}$$
$$P^{-1}AP = \Lambda \tag{5}$$
$$AP = P\Lambda \tag{6}$$

ここで P は $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ という変換の行列であった．

P を縦ベクトル 2 つを横に並べたものとみて，$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}$，$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ とおくと，この式は

$$A \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} A\boldsymbol{e}_1 \ A\boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 \ \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

となり，

$$A\boldsymbol{e}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1,\ A\boldsymbol{e}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{e}_2$$

となる．与えられた行列 A をもとに，この式を満たす $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \lambda_1, \lambda_2$ を求めれば，P, Λ が分かる．$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を固有ベクトル，λ_1, λ_2 を固有値という．ここで $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ という変換の行列であり，逆行列をもたないといけないため，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は線形独立である必要があった．以下で，実際に固有ベクトルと固有値を計算をしてみる．

$$\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \to \ A\boldsymbol{x} = \lambda E \boldsymbol{x} \qquad & \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = 0 \qquad & \begin{bmatrix} \lambda - 5 & +1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \\
\text{固有方程式：}\ \phi(\lambda) = |\lambda E - A| = 0 \qquad & (\lambda - 5)(\lambda - 3) + 1 = 0 \\
& \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \\
& (\lambda - 4)^2 = 0 \\
\text{固有値} \qquad & \lambda = 4
\end{aligned}$$

固有方程式について：$\lambda E - A$ の行列式の値が 0 でないとすると，$(\lambda E - A)^{-1}$ が存在し，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ という解をもつことになる．これは $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ に矛盾する．したがって $|\lambda E - A| = 0$ である．この方程式を固有方程式（特性方程式）と呼んでいた．

$$\begin{aligned}
(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = 0 \qquad & \begin{bmatrix} \lambda - 5 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \\
\lambda = 4 \text{ の場合} \qquad & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \\
\text{これを満たす } x_1, x_2 \text{が固有ベクトル．例えば} \qquad & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1 \qquad (9)
\end{aligned}$$

変換の行列 P は，逆行列をもたないといけないので，線形独立な固有ベクトルが 2 本必要である．しかし，固有値が重解のため，2 本とれない．どうすればよいか．実は，対角化できない行列があり，この行列 A がその一例である．目的（A^n の計算）を達成するにはどうすればよいか．

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{10}$$

を考え，これの $J^2, J^3, \cdots, J^n$ を計算してみる．

$$\begin{aligned} J^2 &= \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} && (11) \\ J^3 &= \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} && (12) \end{aligned}$$

$$J^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \qquad (13)$$

となる．$\boldsymbol{y}$ の時間発展が行列 J で表現できるようになれば好ましい．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}' &= P^{-1}AP\boldsymbol{y} && (14) \\ \boldsymbol{y}' &= J\boldsymbol{y} && (15) \\ P^{-1}AP &= J && (16) \\ AP &= PJ && (17) \end{aligned}$$

ここで P は $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ という変換の行列であった．P を縦ベクトル 2 つを横に並べたものとみて，$P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}$，$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ とおくと，この式は

$$\begin{aligned} A\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} && (18) \\ \begin{bmatrix} A\boldsymbol{e}_1 \ A\boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 + \lambda\boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} && (19) \end{aligned}$$

となり，

$$A\boldsymbol{e}_1 = \lambda\boldsymbol{e}_1,\ A\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \lambda\boldsymbol{e}_2$$

となる．与えられた行列 A をもとに，この式を満たす $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \lambda$ を求めれば，P, J が分かる．いま $\lambda = 4$ であり，$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ であることもわかっている．

$$A\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \lambda\boldsymbol{e}_2$$

$$A\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$$

$$(A - 4E)\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を満たす $\boldsymbol{e}_2$ を計算すればよい．

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5-4 & -1 \\ 1 & 3-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} && (20) \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} && (21) \\ & && (22) \end{aligned}$$

例えば $\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ や $\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ でよい．
これで必要な値がすべて計算できた．

$$\boldsymbol{y}' = J\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \tag{24}$$

$$\boldsymbol{y}^{(n)} = J^n \boldsymbol{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 4^n & n4^{n-1} \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \boldsymbol{y}^{(0)} \tag{25}$$

ある行列 A を，以上のように行列 P を使って $P^{-1}AP$ と変換し，対角行列や行列 J になるように変換できる．そのように変換してできた行列はジョルダン標準形と呼ばれている．2×2 行列では次のふたつのタイプがジョルダン標準形である．

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

同様に 3×3 行列では次の 3 つタイプがジョルダン標準形である．

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

ここで $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が等しい場合もありうる．

<u>直交行列とは</u>：

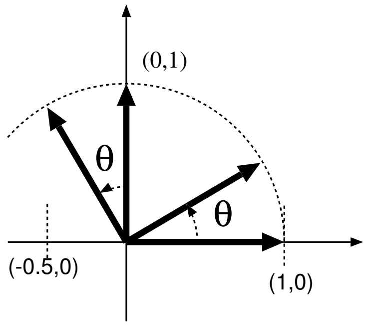
『線分の長さや，線分どうしのなす角は変化しない変換．』

- 線分の長さが変化しない：$||A\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}||$
- 線分どうしのなす角が変化しない：$\cos\theta = \dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}||} = \dfrac{(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})}{||A\boldsymbol{x}||||A\boldsymbol{y}||} \Longrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$

<u>例</u>：x-y 平面で，角度 θ だけ回転する写像
変換行列が $A = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ であるような，変換．これは

$$A = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$$

となっており，原点 O を中心とする角 θ の回転移動を表す行列となっており，これは直交行列の例になっている．



A の固有値 λ を求めると，

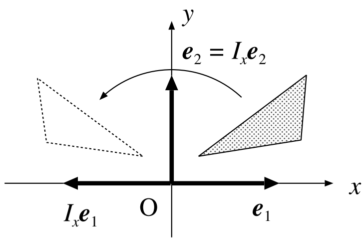
$$\lambda = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \pm i \sin\frac{\pi}{6} = e^{\pm i\pi/6}$$

- 固有ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は実数の範囲にない．$\Longrightarrow$ 2 次元平面を回転するのだから，方向が変わらないベクトルはない．二つの固有ベクトルも互いに複素共役で $\boldsymbol{e}_2 = \bar{\boldsymbol{e}_1}$ の関係にある．

回転と鏡映

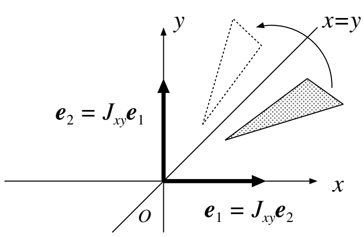
鏡映によって，図形の形は変わらないが，向きが反転，裏返しになる．
例 1. x-y 平面で，y 軸に関して対称に折り返す写像 I_z

$$I_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



例 2.
x-y 平面で，x 軸を y 軸に，y 軸を x 軸にする写像.

$$J_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



一般（広義）の回転： 回転と鏡映をいくつか合成したもの

一般の回転は，任意の図形をそれと合同な図形に写像する．
$\Longrightarrow$ 線分の長さや，線分どうしのなす角はこの写像によって変化しない．

- 線分の長さが変化しない：$|A\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$
- 線分どうしのなす角が変化しない：$\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|} = \dfrac{A\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{y}}{|A\boldsymbol{x}||A\boldsymbol{y}|} \Longrightarrow \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{y}$

  $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{y}$ が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ で成り立てば，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ を代入すると，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|^2 = |A\boldsymbol{x}|^2$ で $|A\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$ が言える．

定理： 直交行列

正方行列 U が直交行列であることは，次のように表すことができて，それらはどれも同値である．

1. 行列 U は一般の回転を表し，図形を合同な図形に写像し，線分の長さもなす角度も変えない．$\Longrightarrow$ 行列式 $|U| = 1$ （この変換によって対応する領域の面積/体積が変化しない）
2. 任意の列ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y})$ （内積の保存）
3. 任意の列ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = |U\boldsymbol{x}|$ （大きさの保存）
4. 行列 U の各列の要素を成分とする n 個の列ベクトルはすべて長さ 1 で，たがいに直交する．すなわち $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$
5. $U^{\mathrm{T}}U = UU^{\mathrm{T}} = E$
$$U^{\mathrm{T}}U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}} \\ \cdots \\ \boldsymbol{u}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$$
   例： $U = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix}$ の場合，内積が $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 0$ となり，大きさ $|\boldsymbol{u}_1| = |\boldsymbol{u}_2| = 1$.
6. $U^{\mathrm{T}} = U^{-1} \Longrightarrow$ 逆行列を計算する手間が省ける

この直交行列による線形変換を，直交変換という

直交という名前の由来：行列を列の並びとみなしたとき，それがすべて直交しているから．

例：

原点 O を中心とする角 $\theta = 30^\circ$ の回転移動を表す行列 $U = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$ は直交行列になっており，上の性質をすべて満たしている．

U^{T} は原点 O を中心とする角 $\theta = -30^\circ$ の回転移動を表す行列
$$U^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos -30^\circ & -\sin -30^\circ \\ \sin -30^\circ & \cos -30^\circ \end{bmatrix}$$
となっており，$UU^{\mathrm{T}} = E$ となるのも直感的に理解できる．