情報システム工学科
伊達 章

二次形式の固有値

今日の目標

二次形式とは
二次形式の固有値

次回： 二次曲線の主軸変換

前回までの話

直交行列，直交変換：

『直交行列による変換（直交変換）で，線分の長さや，線分どうしのなす角は変化しない.』
双一次形式

双一次形式と合同変換：

次のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の実数値関数 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を考える.

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} F \boldsymbol{y}$$

意味：二つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を入力すると一つの実数が得られる.
この関数は次のような線形性をもつことがわかる.

$$f(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = c_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + c_2(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$$

$$f(\boldsymbol{x}, c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2) = c_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + c_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)$$

とする．このとき関数 f を 双一次形式 という．さらに対称性

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

をもつとき双一次形式 関数 f は対称であるという．双一次形式 関数 f が対称であれば行列 F は対称行列

$$F^{\mathrm{t}} = F$$

である.

例：

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$$

を行列を用いて，例えば以下のように書ける.

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

2 次形式：変数の 2 次の項のみからなる式

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} F \boldsymbol{x}$$

を 2 次形式という．当然，F は対称行列になる．

例：

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

を行列を用いて

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

と書ける．

例：内積 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は対称な双一次形式

基底が正規直交系の場合，

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} E \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{y}$$

内積となるには以下の正値性も必要：

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} G \boldsymbol{x} \geq 0 \text{ 等号は } \boldsymbol{x} = 0 \text{ のときにかぎる}$$

例題：次の 2 次形式をベクトルと対称行列を使い表現せよ．

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 6x_3x_1$$

解答：

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x})$$

対称行列にはよい性質がある．証明はほとんどの教科書に掲載されているので省略．

定理： 対称行列

- 対称行列の固有値はすべて実数．
- 各固有値に対して実数を成分とする固有ベクトルが求まる．
- 各固有ベクトルは互いに直交する．

例：対称行列の固有値，固有ベクトルの具体的な計算

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \rightarrow \ F\boldsymbol{x} = \lambda E\boldsymbol{x} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda E - F)\boldsymbol{x} = 0 \qquad \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

固有方程式： $\phi(\lambda) = |\lambda E - F| = 0 \qquad (\lambda - 2)^2 - 1 = 0$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

固有値 $\qquad \lambda = 1, 3$

$$(\lambda E - F)\boldsymbol{x} = 0 \qquad \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda = 1$ の場合 $\qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

これを満たす x_1, x_2が固有ベクトル．例えば $\qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

であるが，長さが 1 になるようにして $\qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1$

$\lambda = 3$ の場合 $\qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

$\lambda = 3$ に対応する固有ベクトル．例えば $\qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_2$

このように対称行列では，固有値，固有ベクトルが実数で，固有ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ が直交していることがわかる．

ここで先にみたように $\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ つまり $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ のように基底ベクトルを変換して考えよう．P は F の固有列ベクトルを並べたものであり，今は互いに直交しており，長さが 1 であるので $P^{-1} = P^{\mathrm{t}}$ と書ける．

不変量：座標変換しても不変な量がある

定理

二次形式 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ の値は，どの基底に関する成分を用いても同じである．

$\boldsymbol{x}$ の成分: $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$，$F' \rightarrow P^{\mathrm{t}}FP$

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}F\boldsymbol{x} = (P\boldsymbol{y})^{\mathrm{t}}FP\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{t}}(P^{\mathrm{t}}FP)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{t}}F'\boldsymbol{y}$$

トレース（対角和，固有和，跡などともいう）：対称行列の対角要素の和．

合同変換： $F' \rightarrow P^{\mathrm{t}}FP$

定理

行列 F のトレースは直交行列による合同変換によって変化しない．
このことを「トレースは直交行列による合同変換に関する不変量である」という．

とくに，行列 F を対角化する直交行列を P とし，行列 F の n 個の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とすると，F' は対角行列で，$\mathrm{Tt}F'$ は固有値の和に等しくなる．したがって，一般に対称行列 F のトレースは

$$\mathrm{Tr}F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

である．

対称行列 F の行列式を計算してみる．

合同変換： $F' \to P^{\mathrm{t}}FP$

直交変換 P の行列式 $|P|$ は ± 1 ． $|F'| = |P^{\mathrm{t}}||F||P|$． $|P||P^{\mathrm{t}}| = 1$ より $|F'| = |F|$

例.

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ |F| = 3$$

を直交行列 P による合同変換を使って対角化する．

$$P = P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|P| = -1$$

$P^tP = E$ となっていることを確認しよう．

$$PP^{\mathrm{t}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P^tFP = \Lambda$ となっていることを確認しよう．

$$F' = P^{\mathrm{t}}FP = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|F'| = 3$$

$|F| = |F'| = 3$ となっていることを確認する．トレース： $2+2 = 1+3$

物理や工学の多くの問題では，二つの二次形式が現れて，一方を対角化し，かつ同時に他方を単位行列にする必要が生じる．(のであるが，ここでは解説する時間がない.)

定理

正値二次形式 (Positive Definite) の固有値はすべて正である．

2 次形式

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}F\boldsymbol{x} \geq 0 \text{（等号は } \boldsymbol{x} = 0 \text{ にかぎる）}$$

を満たす二次形式を正値二次形式，または，正の定符合をもつ二次形式という．ベクトル $\boldsymbol{x}$ がある物理系を表しているとき，各種のエネルギーは正値二次形式になっていることが多い．

例：

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

は $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0$ ならば，

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} C \boldsymbol{x} = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2$$

が 0 となるのは $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ の場合にかぎる．したがって，このときには C は正値対称行列である．