情報システム工学科
伊達 章

線形代数
2007 年 1 月 22 日

# さまざまな行列の性質

## 1 直交行列

**定理： 直交行列**

正方行列 $U$ が直交行列であることは，次のように表すことができ，それらはどれも同値である．この直交行列による線形変換を，直交変換という．

1. 行列 $U$ は一般の回転を表し，図形を合同な図形に写像し，線分の長さもなす角度も変えない．$\Longrightarrow$ 行列式 $|U| = \pm 1$ （この変換により対応する領域の面積/体積が変化しない）
2. 任意の列ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y})$ （内積の保存）
3. 任意の列ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = ||U\boldsymbol{x}||$ （ノルムの保存）
4. 行列 $U$ の各列の要素を成分とする $n$ 個の列ベクトルはすべて長さ 1 で，たがいに直交する．つまり $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$.
5. $U^{\mathrm{t}}U = UU^{\mathrm{t}} = E$
$$U^{\mathrm{t}}U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{t}} \\ \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{t}} \\ \cdots \\ \boldsymbol{u}_n^{\mathrm{t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}$$
例： $U = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix}$ の場合，内積が $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 0$ となり，ノルム $||\boldsymbol{u}_1|| = ||\boldsymbol{u}_2|| = 1$ .
6. $U^{\mathrm{t}} = U^{-1} \Longrightarrow$ 転置行列が逆行列になっているので，逆行列を計算する手間が省ける．

※ 直交という名前の由来：行列を列の並びとみなしたとき，それがすべて直交しているから．

## 2 固有値，固有ベクトルの性質

以下では $\boldsymbol{x}$ が行列 $A$ の固有ベクトル，$\lambda$ が固有値であるとする：$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

1. $\boldsymbol{x}$ が固有ベクトルなら，2.7 $\boldsymbol{x}$ も固有ベクトル：$A(2.7\boldsymbol{x}) = \lambda(2.7\boldsymbol{x})$.
2. 行列 $2.7A$ に対する固有値，固有ベクトルは：
$(2.7A)\boldsymbol{x} = (2.7\lambda)\boldsymbol{x} = \lambda'\boldsymbol{x} \to \lambda' = 2.7\lambda$
3. 行列 $A + 2.7I$ に対する固有値，固有ベクトルは：
$(A + 2.7I)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + 2.7\boldsymbol{x} = (\lambda + 2.7)\boldsymbol{x} = \lambda'\boldsymbol{x}$.
4. 行列 $A^2$ に対する固有値，固有ベクトルは：
$A^2\boldsymbol{x} = A(A\boldsymbol{x}) = \lambda A\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x} = \lambda'\boldsymbol{x}$.
$A^n\boldsymbol{x} = \lambda^n\boldsymbol{x} = \lambda'\boldsymbol{x}$.
例題：$A^3 + 4A^2 - A + 7I$ の固有ベクトルと固有値は：
$(A^3 + 4A^2 - A + 7I)\boldsymbol{x} = (\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda + 7)\boldsymbol{x}$

5. $A^{-1}$ の固有値，固有ベクトルは：

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Longrightarrow\ E\boldsymbol{x} = \lambda A^{-1}\boldsymbol{x} \Longrightarrow\ \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda'\boldsymbol{x}$$

6. 行列式は固有値の積． $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

   $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\ \det(A)\ \det(P) = \dfrac{1}{\det(P)}\ \det(A)\ \det(P) = \det(A)$

   行列式には面積（体積）拡大率という意味があり，$\det(P^{-1})\det(P) = 1$ である．$P$ が逆行列を持たなければ（正則でない，特異），$\det P = 0$ である．

7. $A^{\mathrm{t}}$ （t は転置）の固有値，固有ベクトル．$A^{\mathrm{t}}\boldsymbol{u} = \lambda'\boldsymbol{u}$ とすると，その固有方程式は

$$\phi(\lambda') = \det(\lambda' E - A^{\mathrm{t}}) = \det((\lambda' E - A)^{\mathrm{t}}) = \det(\lambda' E - A) = \phi(\lambda)$$

   行列を転置しても行列式の値は同じ． したがって 固有値 $\lambda' = \lambda$

8. $A$ が固有値 $\lambda = 0$ をもつ．$\Longrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

   これを満たす $\boldsymbol{x} \neq \underline{0}$ が存在するということ．$\Longrightarrow A$ は特異.

# 3 対称行列の性質

**定理： 対称行列** (証明は教科書を参照)

- 対称行列の固有値はすべて実数.
- 各固有値に対して実数を成分とする固有ベクトルが求まる.
- 各固有ベクトルは互いに直交する.

**定理**

二次形式 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ の値は，どの基底に関する成分を用いても同じ（座標変換しても不変）.
$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の変換の式： $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$,

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}F\boldsymbol{x} = (P\boldsymbol{y})^{\mathrm{t}}FP\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{t}}(P^{\mathrm{t}}FP)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{t}}F'\boldsymbol{y}$$

1. 任意の正方行列 $A$ に対して： $(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y})$

$$(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x})^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, A^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y})$$

   したがって対称行列 $V$ （$= V^{\mathrm{t}}$）に対して：$(V\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, V\boldsymbol{y})$

2. 対称行列 $V(= V^{\mathrm{t}})$ の逆行列 $V^{-1}$ も対称行列．$VV^{-1}$ の転置を考えればよい.

$$(VV^{-1})^{\mathrm{t}} = (V^{-1})^{\mathrm{t}}V^{\mathrm{t}} = E = (V^{-1})^{\mathrm{t}}V \Longrightarrow V^{-1} = (V^{-1})^{\mathrm{t}}$$

3. 逆行列 $V^{-1}$ は，$V$ と同じ固有ベクトルをもち，固有値は逆数になる.

$$V^{-1}\boldsymbol{x} = \lambda'\boldsymbol{x} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \lambda V\boldsymbol{x} \quad \Longrightarrow \quad V\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda'}\boldsymbol{x}$$