情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 1 回
2007 年 10 月 3 日

講義の全体像: フーリエ解析とその応用

フーリエ解析 ← 積分がたくさんでてくるが，内容は線形代数.

- 担当教員： 伊達 章
- 連絡先： A-423，`date@cs.miyazaki-u.ac.jp`， 内線 7986
- 成績の評価方法：期末試験 70%，小テスト，レポート 30%
- 教科書： 「信号処理入門」 佐藤幸男著 .
- 内容に関する質問について：
  - オフィスアワー： 木曜日 16:30–17:30.
  - 講義中の質問も歓迎 → ほかの人の理解の助けにもなる

講義の内容

- 1. 講義全体の概論（1. 信号処理とは， 2. 信号処理の例）
- 2. 関数をベクトルとみる（3. 数学の準備体操，4. 相関関数）
- 3. 数学の準備体操 2
- 5 フーリエ級数展開

  5.1 フーリエ級数展開とは
  5.2 偶関数と奇関数
  5.4 複素フーリエ級数展開
  5.5，5.6 フーリエ級数展開の実例
  5.7 フーリエ級数展開の重要な性質
- 7. フーリエ変換

  7.1 フーリエ級数展開からフーリエ変換へ
  7.2 フーリエ変換の性質
  7.3 デルタ関数と白色雑音
- 8. 線形システムの解析

  8.3 インパルス応答
  8.4 周波数領域

フーリエ解析： 何の役にたつのか

音，画像処理に関係が深い．他にも地震や株価などの時系列データ解析．耐震.

問題： 9種類の波形． 表の縦方向，横方向，それぞれ共通にもつ性質は何か．

	ド	レ	ミ
バイオリン			
オルガン			
トランペット			

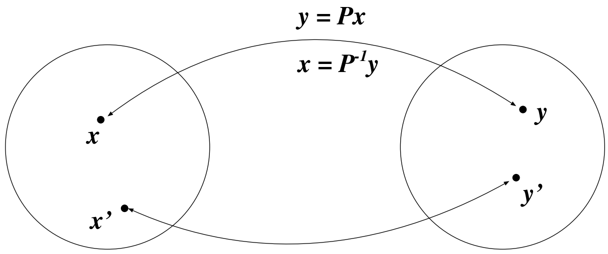
バイオリンで弾いた「ド」「レ」「ミ」の音とオルガンで弾いた「ド」「レ」「ミ」の音を聞き分けるテストを受ける場面を想像してみよう．ヒトは楽器の違いに関わらず音階を正しく聞き分けられる．一方で，どの楽器による音なのか，その音色も聞き分けられる．

楽器の違いに関わらず音階を正しく聞き分けられるということは，波形が異っていても，その中の何か共通な性質を聞き分けているということである．バイオリンの「ド」とオルガンの「ド」の音（波形）で共有している性質と異なる性質をそれぞれ何か．

1. まず，いろいろな楽器の「ド」「レ」「ミ」という音を聞いてみる．同時に波形も見る．
2. 波形が違うことが，聴える音の違らしい，ことを確認する．
3. 「ド」が分かるということは，異なる楽器の「ド」の音で共通点があるはず．それは基本周波数と呼ばれるものが違う．音の波形が周期的であることに気づく．音を構成する波形の基本周波数（基本振動の周波数，基音，ピッチ周波数）が等しい．
4. 音を聞いて，楽器の種類がわかる．楽器の種類は，どう判別しているか．バイオリンの音がもつ波形の共通点．これは難しい.「パワースペクトルの分布」が異なる．興味のある人は，卒業研究でおこなう．

横軸が時間の波形を見ていても，よく分からない．音の波形を周波数ごとに分解し，周波数領域で音を考えてみるとよくわかる．これがフーリエ変換．

確認しておくこと： 短い時間スケールでみると，周期的な波形になっている



フーリエ変換 ： 1対1の変換．時間領域 $\leftrightarrow$ 周波数領域．
実体は同じもの． 違う表現の仕方をしているだけ．

時間領域での表現
横軸： 時間 t
縦軸： 各時間における振幅の値 $f(t)$

周波数領域での表現
横軸： 周波数 f または ω
縦軸： 各周波数における周波数成分の値 $F(\omega)$

復習： 波の性質

問：それぞれ波形の周期はいくつか

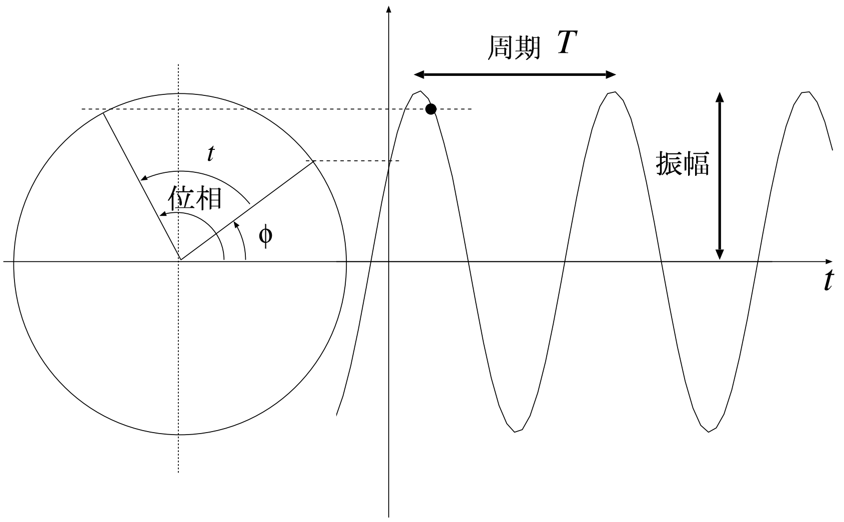
$$1 : f(t) = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$2 : g(t) = \sin t + \frac{1}{3}\sin 3t$$

式を見た瞬間に答はわかる． 波形の合成なんかしなくていい．
関数のおおまかな波形をイメージできるようになることが重要．

周期が同じものをたしても同じ周期の波形が得られる．振幅と位相は，計算しないとわからない．

<u>正弦波に関する用語の確認</u>
1. 振幅，2. 位相（偏角）3. 周期，振動数（周波数，角周波数）



円運動と単振動，波との関係．
例： $f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$． 振幅 A，初期位相 ϕ．
振動数 f： 1 秒間の振動（回転）の回数． $f = 1/T$
角周波数 rad/sec． 1 回転（周期）を 2π とした場合，1 秒間に何回転するか．$\omega = 2\pi f$

$\boxed{\text{定義： 周期}}$

すべての t に対して

$$f(t + T) = f(t)$$

となる T を $f(t)$ の周期という．

例：$f(t) = \sin t$ の場合．

$$f(t + 2\pi) = \sin(t + 2\pi) = \sin t \to \text{周期 } 2\pi \quad (1)$$

$$f(t + 4\pi) = \sin(t + 4\pi) = \sin t \to \text{周期 } 4\pi \quad (2)$$

$$f(t + 2k\pi),\ k \text{ は整数}, = \sin(t + 2k\pi) = \sin t \to \text{周期 } 2k\pi \quad (3)$$

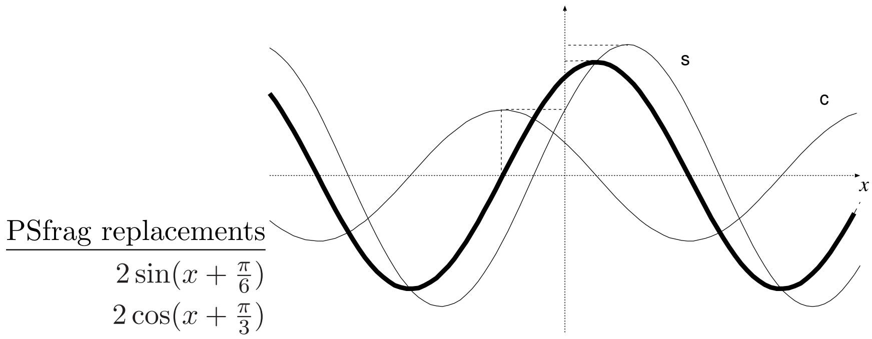
$\sin t$ は，周期 $2k\pi, k$ は整数，の関数．
<u>基本周期</u>：周期 T のうちで，もっとも小さな正の値．

もとの話に戻る：
$\boxed{\text{例}}$

$$f(t) = 2\sin(t + \frac{\pi}{6}) + \cos(t + \frac{\pi}{3}),$$

という関数について，そのグラフがどうなるか考えよう．まず　$2\sin(x + \frac{\pi}{6})$，$\cos(t + \frac{\pi}{3})$ という 2 つの正弦曲線（サインカーブ）を描き，それらを加え合わせると，どういう形になるか考えよう．

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\sin(t + \frac{\pi}{6}) + \cos(t + \frac{\pi}{3}) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t\right) + \left(\frac{1}{2}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{3}{2}\cos t \\ &= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\right) = \sqrt{3}\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned} \tag{4}$$




```
%gnuplot
plot [-5:5][-3:3] 2*sin(x+pi/6), cos(x+pi/3), 2*sin(x+pi/6)+cos(x+pi/3)
```

振幅が 2 の正弦曲線と振幅が 1 の正弦曲線を加えあわせると，やはり正弦曲線が得られる．ただし，振幅は $1 + 2 = 3$ よりはるかに小さな $\sqrt{3}$ である．これは，2 つの波が重なりあう際に観察される現象を説明する数学的例である．

一般的に，

$$f(x) = 2\sin(x + \phi) + \cos(x + \theta)$$

の場合，加法定理を使って，

$$f(x) = 2(c_1 \sin x + c_2 \cos x) + c_3 \cos x - c_4 \sin x \tag{5}$$

$$f(x) = (2c_1 - c_4)\sin x + (2c_2 + c_3)\cos x \tag{6}$$

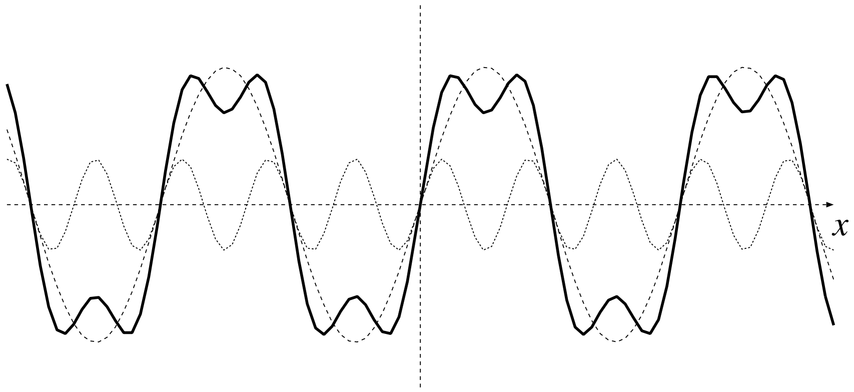
と，同じ周期で初期位相 0 で変動する $\sin x, \cos x$ の和で書ける（c_1, c_2, c_3, c_4 は定数）．したがって加法定理を使って $A_1 \sin(x + \phi_1), A_2 \cos(x + \phi_2)$ のどちらか一方でも表現できる．ただし周期は同じであるが，振幅や位相は変わることに注意したい．

このように位相や振幅が異なる $\sin, \cos$ の一次結合で表現される波は，それぞれの周期が同じであれば結局，正弦波になることがわかる．同じ波を表現するのにいろいろな表現があり，まぎらわしいが利点が多いので，仕方なしとしよう．

周期が異なる場合はどうなるだろうか．基本周期はどうなるだろうか．

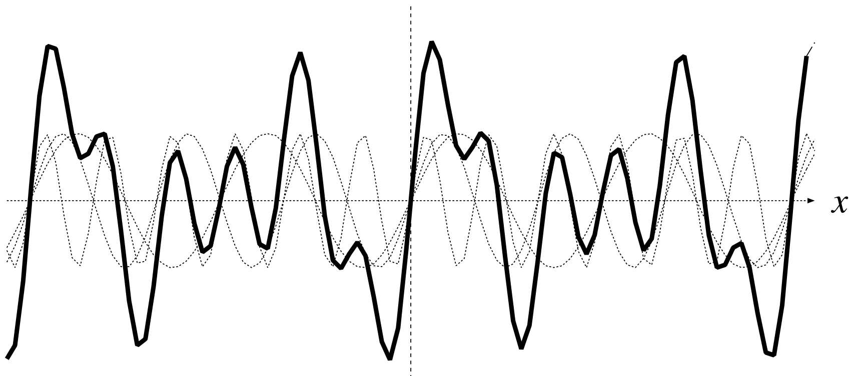
$\boxed{\text{例}}$

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$$



$\boxed{\text{例}}$

$$f(x) = \sin x + \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{3}$$



<u>周期の異なる正弦曲線の和は，一般に正弦曲線にはならない．</u>