

## 数学の準備体操

前回

復習その 1

楽器音の波形は、ある部分波形の繰り返しになっている。

復習その 2 教科書 p.5 :

正弦波 :  $f(t) = A \sin(\omega t + \theta)$ ,  $-\infty < t < \infty$ ,  $A$  : 振幅 .  $\omega$  : 角周波数 .  $\theta$  : 位相 .

周期信号  $f(t)$ ,  $f(t+T) = f(t)$ , 周期  $T = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ , 基本周期  $2\pi$  .

重要 : 周期が同じ正弦波を足し合わせた結果は、やはり同じ周期の正弦波 .

ただし振幅と位相は、計算しないとわからない .

例 :  $f(t) = 2 \sin(t + \frac{\pi}{6}) + \cos(t + \frac{\pi}{3})$

問題 教科書 p.50 :

[2] 図で示される周期信号が  $[0, 1]$  で互いに直交することを確認なさい .

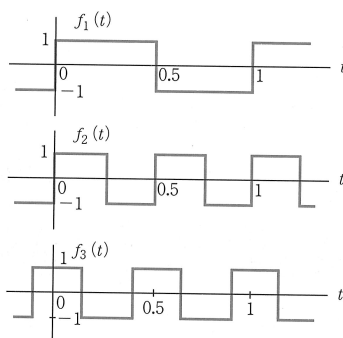


図 3・11

[3]  $\{1, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos 2t, \sqrt{2} \sin 2t, \dots, \dots\}$  が  $[-\pi, \pi]$  で正規直交関数系をなすことを確認なさい .

$$e_0 = f_0(t) = 1, e_1 = f_1(t) = \sqrt{2} \cos t$$

今日の目標 : 以下の事を理解する .

1. 信号が直交するとは .
2. 正規直交関数系とは .

1. 波形 (関数, 信号) をベクトルと見ると, 長さや角度が定義できる .
2. 波形を正規直交基底を使って表現した場合, 各基底に対する成分は内積を使い表現できる .

### 3.2 信号の表現

$f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$  ... アナログ信号  $f(t)$  の  $N$  点のサンプル値の系列

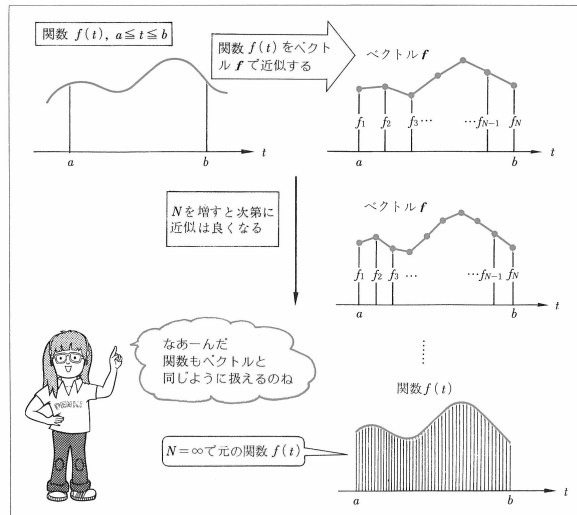


図 3.1 関数をベクトルで近似して表現する

### 3.3 2次元ベクトルの距離と内積

#### 復習

2次元ベクトル:  $f = (f_1, f_2)$ ,  $g = (g_1, g_2)$

内積:  $\langle f, g \rangle = f_1g_1 + f_2g_2$

$$\langle f, g \rangle = |f||g| \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{\langle f, g \rangle}{|f||g|} \rightarrow -1 \leq \frac{\langle f, g \rangle}{|f||g|} \leq 1$$

これを教科書では相関係数  $r$  と呼んでいる.

自分自身との内積 ( $\cos 0 = 1$ )

$$\langle f, f \rangle = |f|^2 \rightarrow |f| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

ノルム  $\|f\|$ : ベクトルの長さを一般化したもの.  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$

直交: 「二つのベクトル  $f$  と  $g$  が直交する」  $\leftrightarrow \langle f, g \rangle = 0$  ( $\theta = \pi/2$ )

### 3.4 正規直交基底

直交基底  $\{v_1, v_2\}$  によるベクトル  $f$  の表現

$$f = C_1v_1 + C_2v_2$$

$$\langle f, v_1 \rangle = \langle C_1v_1 + C_2v_2, v_1 \rangle = C_1 \langle v_1, v_1 \rangle + C_2 \langle v_2, v_1 \rangle = C_1 \langle v_1, v_1 \rangle = C_1 \|v_1\|^2$$

係数  $C_1$  の求め方

$$\langle f, v_1 \rangle = C_1 \|v_1\|^2 \rightarrow C_1 = \frac{1}{\|v_1\|^2} \langle f, v_1 \rangle$$

$v_1$  が単位ベクトル  $\|v_1\|^2 = 1$  のときは  $C_1 = \langle f, v_1 \rangle$

正規直交基底の各基底に対する成分は内積を使って簡単に表現できる (教科書 p.37)

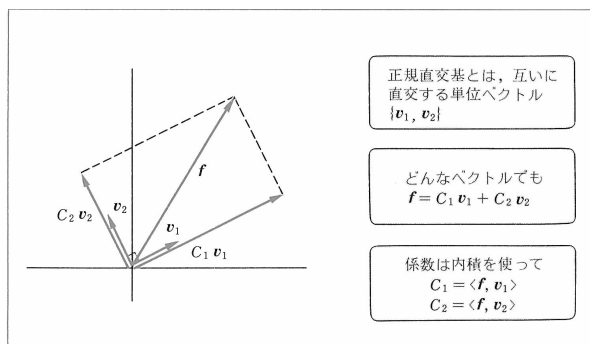


図 3・7 正規直交基底でベクトルを表す

### ベクトルの線形結合と基底 (とても大切な概念)

$\mathcal{R}^3$  において

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

をとると

$$\forall v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^n \text{ は}$$

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

と  $e_1, e_2, e_3$  の線形結合で表される。しかも, この係数は  $v$  で一意に定まる。  
 $e_1, e_2, e_3$  を  $\mathcal{R}^3$  の基底 (basis) とよぶ。

### 正規直交基底

互いの内積が

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (2)$$

となっている。

### 例題

$$\begin{cases} e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathcal{R}^n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{R} \text{ に対して} \end{cases} \quad (3)$$

$$v = \sum_{i=1}^n x_i e_i = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad (4)$$

が  $n$  個の正規直交基底  $e_1, e_2, \dots, e_n$  の線形結合 (1次結合) で表現されている。

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

とは限らない．任意のベクトル  $v$  が与えられたとき，その第 1 成分はいくつか．

**答え**

ここで  $v$  と  $e_1$  の内積を計算してみよう．

$$(v, e_1) = (x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n, e_1) \quad (6)$$

$$= (x_1 e_1, e_1) + (x_2 e_2, e_1) + \cdots + (x_n e_n, e_1) \quad (7)$$

$$= x_1 (e_1, e_1) + x_2 (e_2, e_1) + \cdots + x_n (e_n, e_1) \quad (8)$$

$$= x_1 (e_1, e_1) \quad (9)$$

$$= x_1 \quad (10)$$

このように  $v$  の  $e_1$  成分が内積をとることにより取り出せる．

**例題**

基底ベクトルとして

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

を考える．

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

このときの  $x_1, x_2$  を求めよ．

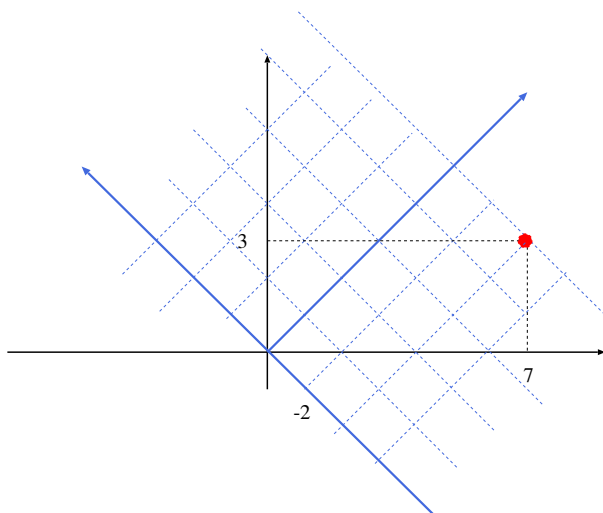
**答え**

$$x_1 = (v, e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \quad (13)$$

$$x_2 = (v, e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \quad (14)$$

したがって

$$v = 5\sqrt{2}e_1 - 2\sqrt{2}e_2 \quad (15)$$



### 3.5 多次元ベクトル空間から関数空間へ（自然に拡張する）

$$\|f\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_N^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^N f_i^2}$$

$f(t)$  のある区間  $a < t < b$  でサンプル点  $N \rightarrow \infty$  を考える（無限次元空間，関数空間）

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)g(t)dt$$

$$\|f(t)\| = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)^2 dt}$$

$f(t)$  と  $g(t)$  が直交  $\leftrightarrow \langle f(t), g(t) \rangle = 0$