情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 4 回
2007 年 10 月 24 日

フーリエ級数 その 1

復習

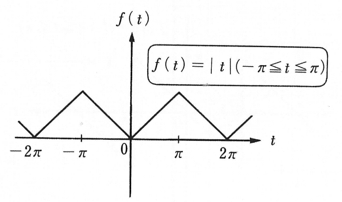
1. 波形（関数，信号）をベクトル $\boldsymbol{f}$ と見ると，長さや角度が定義できる．
2. $\boldsymbol{f}$ を正規直交基底を使って表現した場合，各基底に対する成分は内積を使い表現できる．

本日： フーリエ級数． 問題 教科書 p.70

（問） $f(t)=|t|$ を区間 $[-\pi,\ \pi]$ でフーリエ級数に展開してみよう．

（答）

$$f(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos t+\frac{1}{9}\cos 3t+\frac{1}{25}\cos 5t+\cdots\right)$$



$$f(t)\approx a_0'+a_1\cos t+b_1\sin t+a_2\cos 2t+b_2\sin 2t+\cdots$$

とは何かを知り，具体的に $|t|, -\pi\leqq t<\pi$ のフーリエ級数を求めることができるようにする．

問：大きさが 1 で互いに直交するような関数にはどのようなものがあるか．
区間 $[-\pi,\pi]$ における $\{1,\sin t,\sin 2t,\sin 3t,\cdots\}$ を考えてみる．

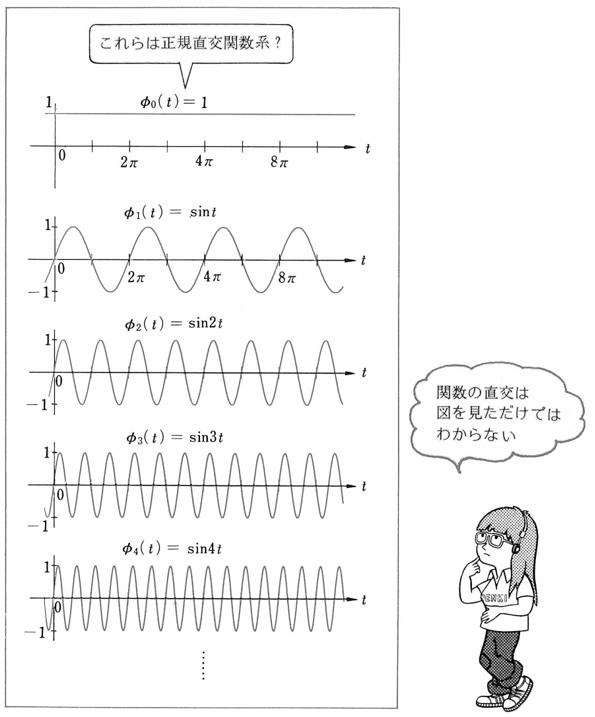


図 3・10 正規直交関数系の判定をしてみる

この図が示す通り,「関数の直交は図を見ただけでは分からない」

区間 $[-\pi,\pi]$ における $\{1,\sin t,\sin 2t,\sin 3t,\cdots,\cos t,\cos 2t,\cos 3t,\cdots\}$ を考えてみる.

<u>三角関数（基底）の直交性</u>

区間 $(-\pi,\pi)$ （1 周期）で考える． 以下では，k,m,n は整数.

$$(1,\sin t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin t dt=[-\cos t]_{-\pi}^{\pi}=-[\cos t]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$(1,\sin kt)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin kt dt=\left[-\frac{1}{k}\cos kt\right]_{-\pi}^{\pi}=-\frac{1}{k}\left[\cos kt\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$(1,\cos t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos t dt=[\sin t]_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$(1,\cos kt)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos kt dt=\frac{1}{k}[\sin kt]_{-\pi}^{\pi}=0$$

（面積を考えれば 0 になる）

$$\begin{aligned}(\cos mt,\cos nt)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mt\cos nt dt &(1)\\&=\frac{\pi}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(m+n)t+\cos(m-n)t\}dx &(2)\\&=\frac{\pi}{4}\left[\sin(m+n)t+\sin(m-n)t\right]_{-\pi}^{\pi} &(3)\\&=0 &(4)\end{aligned}$$

$$(\sin t,\cos t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}（奇関数）\times（週関数)\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}（奇関数)\mathrm{d}t=0$$

計算テクニック： 奇関数： $f(-t)=-f(t)$，偶関数： $g(-t)=g(t)$

<u>問</u>： $h_1(t)=f(t)g(t),h_2(t)=f_1(t)f_2(t)$ は奇関数，偶関数のどちらになるか.

1. $h_1(-t)=f(-t)g(-t)=-f(t)g(t)\rightarrow$ 奇関数 $\times$ 偶関数 $=$ 奇関数
2. $h_2(-t)=f_1(-t)f_2(-t)=(-f_1(t))(-f_2(t))=f_1(t)f_2(t)\rightarrow$ 奇関数 $\times$ 奇関数 $=$ 偶関数

<u>ノルム</u>

$$||1||^2=(1,1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot 1\ dx=[t]_{-\pi}^{\pi}=1$$

$$\begin{aligned}||\cos kt||^2&=(\cos kt,\cos kt) &(5)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kt dt &(6)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 2kt+1}{2}dt &(7)\\&=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{2k}\sin 2kt+t\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2} &(8)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
||\sin kt||^2 &= (\sin kt, \sin kt) & (9)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt dt & (10)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2kt}{2} dt & (11)\\
&= \frac{1}{4\pi}\left[x - \frac{1}{2k}\sin 2kt\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} & (12)
\end{aligned}
$$

$$||f(t)||^2 = (f(t), f(t)) = \int_a^b f(t)^2 dt$$

大きさが 1 でないベクトルの，方向を変えずに大きさを 1 にする方法

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||}$$

例．　$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, ||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{5}$

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||} = \boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

大きさが 1 になっている．

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

$||\sin kt|| = ||\cos kt|| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって区間 $[-\pi, \pi]$ における $\{1, \sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\sin 2t, \sqrt{2}\sin 3t, \cdots, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\cos 2t, \sqrt{2}\cos 3t, \cdots\}$ が正規直交関数系になっている．

周期 2π の関数 $f(t)$ のフーリエ級数（教科書 p.66, 67）

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + a_1\cos t + a_2\cos 2t + \cdots + b_1\sin t + b_2\sin 2t + \cdots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt)$$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\mathrm{d}t,\ (k = 0, 1, 2, \cdots)\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\mathrm{d}t,\ (k = 0, 1, 2, \cdots)
\end{aligned}
$$

※ 係数の意味： $\cos kt, \sin kt$ が基底で，a_k, b_k は $f(t)$ の各基底成分（基底と内積をとった値）．