情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 5 回
2007 年 10 月 31 日

フーリエ級数 その 2

復習

1. フーリエ級数の見方：$f(x)$ を正規直交基底 $\cos kt, \sin kt$ の線形結合で表現
2. a_k, b_k は $f(t)$ の各基底成分（基底と内積をとった値）.

関数 $f(x)$ のフーリエ級数（教科書 p.66, 67）

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \cdots + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \cdots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \mathrm{d}t, \text{（}k = 0, 1, 2, \cdots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \mathrm{d}t, \text{（}k = 0, 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

今日の目標

いくつかの関数について具体的にフーリエ級数を求める.

注意点： 教科書 p.68 図 5.2

・ $\frac{a_0}{2}$： 直流成分

・ 上記のフーリエ級数の基本周期は $2\pi \Longrightarrow$ フーリエ級数展開は，周期関数を表現

例 のこぎり波： 区間 $-\pi \leqq t < \pi$ において $f(t) = t$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos kt \ \mathrm{d}t \ k = 0, 1, 2, \cdots \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{（奇関数）} \times \text{（偶関数）} \mathrm{d}t \qquad (1) \\ &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \ \mathrm{d}t \\ &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

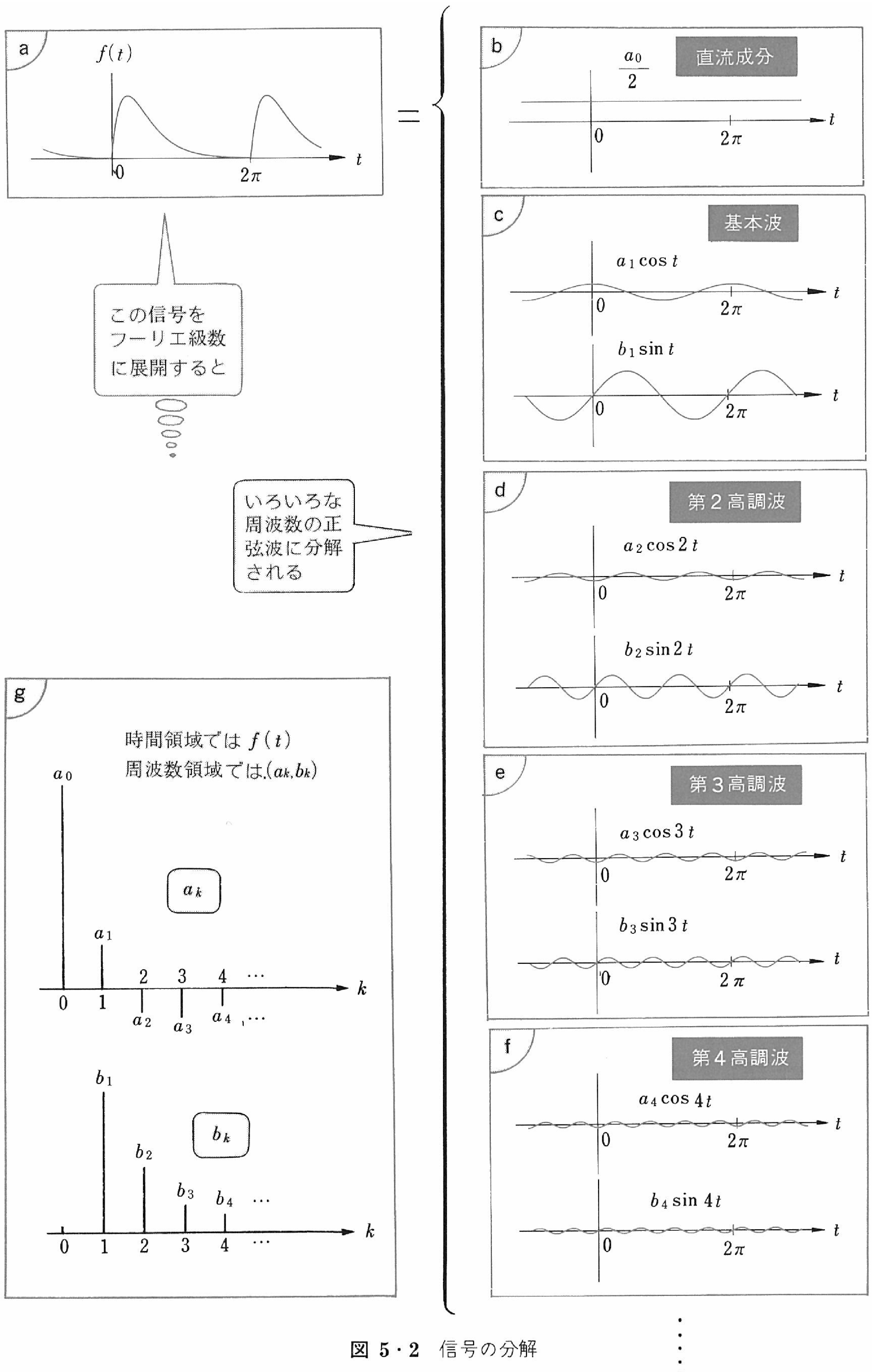
a
$f(t)$
0
2π
t
=
この信号を
フーリエ級数
に展開すると
いろいろな
周波数の正
弦波に分解
される
b
$\frac{a_0}{2}$
直流成分
c
基本波
$a_1 \cos t$
$b_1 \sin t$
d
第 2 高調波
$a_2 \cos 2t$
$b_2 \sin 2t$
e
第 3 高調波
$a_3 \cos 3t$
$b_3 \sin 3t$
f
第 4 高調波
$a_4 \cos 4t$
$b_4 \sin 4t$
g
時間領域では $f(t)$
周波数領域では (a_k, b_k)
a_0
a_k
a_1
a_2
a_3
a_4, …
b_k
b_1
b_2
b_3
b_4 …
k

図 5・2　信号の分解

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin kt\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}（\text{奇関数}）\times（\text{奇関数}）\mathrm{d}t \qquad (4)\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin kt\ \mathrm{d}t \qquad (5)\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\left[-\frac{1}{k}\cos kt\right]'\ \mathrm{d}t \qquad (6)\\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{t}{k}\cos kt\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos kt\right]\mathrm{d}t\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-\frac{t}{k}\cos kt\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{k^2}\sin kt\right]_0^{\pi}\mathrm{d}t\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{(-\pi)}{k}\cos k\pi = -\frac{2}{k}\cos k\pi
\end{aligned}
$$

$\cos k\pi,\ k = 0, 1, 2, \cdots \Longrightarrow 1, -1, 1, -1, \cdots$ である． $\Longrightarrow (-1)^k$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{2}{k}(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \\
f(t) = t &\approx \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin kt \\
&= 2\left(\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

<u>例</u>　区間 $[-\pi, \pi]$ で $f(t) = t^2$ となる周期 2π の関数

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos kt\ \mathrm{d}t\ k = 0, 1, 2, \cdots \\
&= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}（\text{偶関数}）\times（\text{偶関数}）dt\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos ktdt, \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\left[\frac{1}{k}\sin kt\right]' dt, \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[t^2\frac{1}{k}\sin kt\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2t\frac{1}{k}\sin ktdt\right\} \\
&= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} t\sin ktdt \\
&= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} t\left[-\frac{1}{k}\cos kt\right]' dt \\
&= -\frac{4}{k\pi}\left\{\left[-\frac{t}{k}\cos kt\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{k}\cos ktdt\right\} \\
&= \frac{4}{k\pi}\left\{\frac{\pi}{k}(-1)^k + \frac{1}{k}\left[\frac{1}{t}\sin kt\right]_0^{\pi}\right\} \\
&= \frac{4}{k^2}(-1)^k
\end{aligned}
$$

k で割っていたので，$k=0$ のときは別に計算する必要がある．

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{3}\pi^3 = \frac{2}{3}\pi^2 \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin ntdt,\ k=1,2,\cdots \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{（偶関数）} \times \text{（奇関数）} dt = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_k \cos kt \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k \cos kt \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4\cos t + \cos 2t - \frac{4}{9}\cos 3t + \frac{4}{16}\cos 4t + \cdots \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos t}{1^2} - \frac{\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} - \frac{\cos 4t}{4^2} + \cdots\right) \end{aligned}$$

※ このように計算は大変面倒である...

5.2 偶関数と奇関数

5.3 フーリエ級数展開したい関数の周期が 2π でない場合

来週

複素フーリエ級数