

フーリエ級数 その 3

本日

複素数の演算法 (復習)

複素フーリエ級数

復習

1. フーリエ級数の見方: $f(t)$ を正規直交基底 $\cos kt, \sin kt$ の線形結合で表現
2. a_k, b_k は $f(t)$ の各基底成分 (基底と内積をとった値) .

復習: 関数 $f(t) = |t|$ のフーリエ級数 (教科書 p.70)

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

例 三角波: 区間 $-\pi \leq t < \pi$ において $f(t) = |t|$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos kt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{偶関数}) \times (\text{偶関数}) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos kt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{t \sin kt}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{k} \sin kt dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos kt}{k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{\cos k\pi - 1}{k^2} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \end{aligned}$$

k が奇数のときだけ係数が 0 でなくなる .

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \sin kt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\text{偶関数}) \times (\text{奇関数}) dt = 0$$

5.2 偶関数と奇関数

教科書の記述がすばらしい .

偶関数と奇関数

1. 偶関数のフーリエ級数は \cos の項のみで表され,
2. 奇関数のフーリエ級数は \sin の項のみで表される.

p.70 の例題を計算する前に分かること: $f(t) = |t|$ は偶関数より $f(t)$ は \cos 項のみで表現できるはず.

5.3 フーリエ級数展開したい関数の周期が 2π でない場合

基本周期が T の関数を表現したい場合

1. 基本周期が T になるよう変数 t を線形変換 $t \rightarrow \frac{2\pi}{T}t$ すればよい.
 $\cos t$ は周期 2π , $\cos \frac{2\pi}{T}t$ は周期 T .
2. 積分区間を 1 周期分とる ($-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$, $0 < t < T$ など)

5.4 複素フーリエ級数展開

本質的にフーリエ級数と同じ

周期 2π の関数 $f(x)$ に対する複素フーリエ級数

$$\begin{aligned} f(t) &\approx \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt} \\ &= \cdots + C_{-3}e^{-3jt} + C_{-2}e^{-2jt} + C_{-1}e^{-jt} + C_0 + C_1e^{jt} + C_2e^{2jt} + C_3e^{3jt} + \cdots \\ C_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-jkt} dt \end{aligned}$$

$$e^{jkt} = \cos(kt) + j \sin(kt) : \text{オイラーの公式}$$

複素数と複素平面: すべて図をイメージして意味を理解する

1. 複素数 $z = \alpha + j\beta = |z|e^{j\theta}$ (教科書では $\theta = \angle z$)
2. 複素平面: 複素数は 2 次元の実ベクトル (α, β) , 実部 α , 虚部 β

$$\begin{cases} \alpha \text{ を } z \text{ の実部 (real part)} & \alpha = \text{Re}[z] \\ \beta \text{ を } z \text{ の虚部 (imaginary part)} & \beta = \text{Im}[z] \end{cases}$$

と呼び, それらを, それぞれ $\text{Re}[\alpha]$, $\text{Im}[\alpha]$ と表す.

3. 絶対値 (振幅) $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, 偏角 (位相) $\theta = \arg(z)$

4. 複素数の積（絶対値どうしをかけて偏角は足す）

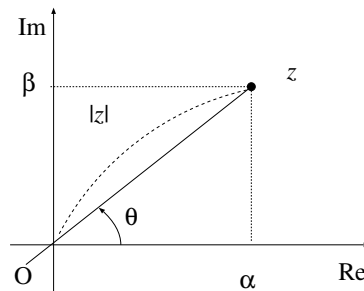
$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\arg(z_1) + \arg(z_2))}$$

5. $|z|^2 = z \bar{z} = (\alpha + j\beta)(\alpha - j\beta) = \alpha^2 + \beta^2$

6. オイラーの公式： $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ （不思議な式： $e^{i\pi} = -1$ ）

7. 1の n 乗根： $\alpha^n = 1$ （単位円を n 分割した図をイメージ）

複素平面



複素数 $z = \alpha + j\beta$ (α, β は実数) に対して, 座標平面の点 (α, β) が対応. この平面を複素平面またはガウス平面と呼ぶ. 横軸, 縦軸は, それぞれ実軸, 虚軸と呼ばれる. 複素数は, 2次元の実数と思えば良い.