情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 7 回
2007 年 11 月 14 日

フーリエ級数展開 その 4 複素フーリエ級数の実例

今日の目標

複素フーリエ級数

復習

1. 複素数

5.2 偶関数と奇関数

教科書の記述がすばらしい.

偶関数と奇関数

1. 偶関数のフーリエ級数は cos の項のみで表され,
2. 奇関数のフーリエ級数は sin の項のみで表される.

p.70 の例題を計算する前に分かること： $f(t) = |t|$ は偶関数より $f(t)$ は cos 項のみで表現できるはず.

5.3 フーリエ級数展開したい関数の周期が 2π でない場合

基本周期が T の関数を表現したい場合

1. 基本周期が T になるよう変数 t を線形変換 $t \to \dfrac{2\pi}{T}t$ すればよい.

   $\cos t$ は周期 2π, $\cos\dfrac{2\pi}{T}t$ は周期 T.

2. 積分区間を 1 周期分とる.（ $-\dfrac{T}{2} < t < \dfrac{T}{2}$, $0 < t < T$ など）

5.4 複素フーリエ級数展開

本質的にフーリエ級数と同じ

周期 2π の関数 $f(x)$ に対する複素フーリエ級数

$$\begin{aligned}
f(t) &\approx \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt} \\
&= \cdots + C_{-3}e^{-3jt} + C_{-2}e^{-2jt} + C_{-1}e^{-jt} + C_0 + C_1 e^{jt} + C_2 e^{2jt} + C_3 e^{3jt} + \cdots \\
C_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jkt} dt
\end{aligned}$$

$$e^{jkt} = \cos(kt) + j\sin(kt)$$ ：オイラーの公式

複素フーリエ級数展開を導く

複素数の値をもつ関数（複素関数） $f(t), g(t)$ の内積の定義

　ある区間 $[a,b]$ において複素数値の関数 f, g に対して，次のような積分によって決まる複素数を (f,g) と表し，f と g の内積と呼ぶ.

$$< f(t), g(t) >= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt = \overline{\frac{1}{b-a}\int_a^b \overline{f(t)}g(t)dt} = \overline{< g(t), f(t) >}$$

$\boxed{\text{直交性}}$

例： e^{-j3t} と e^{jt} が区間 $-\pi < t < \pi$ で直交していることを示す.
(内積 $< \mathrm{e}^{-i3x}, \mathrm{e}^{ix} >= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-j3t}\mathrm{e}^{-jt}dt = 0$ を示せばいい.）

$$\begin{aligned} < \mathrm{e}^{-j3t}, \mathrm{e}^{jt} > &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-j3t}\mathrm{e}^{-jt}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-j4t}dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos 4t - i\sin 4t\}dt \\ &= 2\int_0^{\pi} \cos 4t dt \\ &= 2\cdot\frac{1}{4}\left[\sin 4t\right]_0^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

一般の $n, m, n \neq m$ の場合も，上のような計算になることは簡単に確かめることができる.

例：基底のノルム． e^{-j3t} の区間 $-\pi < t < \pi$ でのノルムを求める.

$$\begin{aligned} < \mathrm{e}^{-j3t}, \mathrm{e}^{-j3t} > &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-j3t}\mathrm{e}^{j3t}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{0}dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

一般の場合も，上のような計算になることは分かる.

目標： 図 5.13 が理解できれば OK！

フーリエ級数の計算例 （p.84）

　周期 T の関数

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leqq t \leqq 1 \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

を複素フーリエ級数展開する． $-\dfrac{T}{2} < t < \dfrac{T}{2}$ の一周期で考える.

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} dt = \frac{2}{T} \\
C_k &= \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} e^{-j2\pi kt/T} dt \\
&= \frac{1}{T}\left\{\int_{-1}^{1} \cos\{2\pi kt/T\} dt - j\int_{-1}^{1} \sin\{2\pi kt/T\} dt\right\} \\
&= \frac{2}{T}\int_{0}^{1} \cos\{2\pi kt/T\} dt \\
&= \frac{2}{T}\frac{T}{2\pi k}\left[\sin\{2\pi kt/T\}\right]_0^1 \\
= &= \frac{1}{\pi k}\sin\{2\pi k/T\}
\end{aligned}
$$

したがって $f(t)$ の複素フーリエ級数表現は

$$
f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi k}\sin\{2\pi k/T\} e^{jkt}
$$

となる.