

## フーリエ級数展開 その 5 フーリエ級数展開の重要な性質

### 今日の目標

#### パーシバルの定理

#### 復習

1. 5.2 偶関数と奇関数
2. 5.3 フーリエ級数展開したい関数の周期が  $2\pi$  でない場合
3. 5.4 複素フーリエ級数展開

目標： 図 5.13 が理解できれば OK！

本日行なう項目は，教科書に分かりやすい記述があるため，このノートは補足程度．

#### 5.5 パーシバルの定理

##### パーシバルの定理

$$\|f(t)\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

周期  $2\pi$  の関数  $f(t)$  を考える．

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt} \quad (1)$$

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \|f(t)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt \quad (2)$$

$$\left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt}, \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_l e^{jlt} \right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \langle C_k e^{jkt}, C_l e^{jlt} \rangle \quad (3)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_k \overline{C_l} \langle e^{jkt}, e^{jlt} \rangle \quad (4)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt} \overline{C_l e^{jlt}} \quad (5)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \overline{C_k} \quad (6)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 \quad (7)$$

図 5.15 (p.86) を理解する．

## 5.6 フーリエ級数展開の実例

## 5.7 フーリエ級数展開の重要な性質

1. 近似の誤差は
2. 不連続点では
3. 信号の大きさが変わると
4. 二つの信号を加えると
5. 信号を移動すると

補足：完全性とは（教科書には説明されていない）

基底としてある直交関数系をとったとする．今の場合， $1, \cos kt, \sin kt, n = 1, 2, \dots$ ．ここで，ある関数  $f(t)$  がすべての基底関数と直交するのが， $f(t) = 0$  だけのとき，この直交関数系は完全であるという．

完全ではない例：

$$\{\sin t, \sin 2t, \sin 3t, \dots\}$$

この基底関数（基底ベクトル）は直交系をなすが，例えば  $f(t) = \cos t$  は，どの基底ベクトルとも直交する（係数  $b_n = 0, n = 1, 2, \dots$ ）．

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|b_n|^2) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$$

左辺は 0 となる．一方  $f(t) = \cos t$  なので，右辺は値をもつ．上の等式は実は成り立たない．ここから，この基底ベクトルの組が完全ではないことがわかる．

次回

## 7.1 フーリエ級数からフーリエ変換へ

## 7.2 フーリエ変換の性質

補足．

複素フーリエ級数展開の例：

例 1：

周期  $2\pi$  の関数  $f(t) = t$  の複素フーリエ級数を区間  $-\pi < t \leq \pi$  で求める．

$f(t) \approx \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{jkt}$  と複素フーリエ級数表現するとき，その係数  $c_n$  は

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

と計算できる．具体的には，

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0 \implies \text{平均値に対応} \\
C_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-jkt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t (\cos kt - j \sin kt) dt \\
&= (\text{奇関数} \times \text{偶関数} = \text{奇関数}) \\
&= -\frac{j}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin kt dt \\
&= -\frac{j}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ t \left( -\frac{1}{k} \cos kt \right)' \right\} dt \\
&= \frac{j}{k\pi} \int_0^{\pi} \{ t (\cos kt)' \} dt \\
&= \frac{j}{k\pi} \left\{ [t \cos kt]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos kt dt \right\} \\
&= \frac{j}{n\pi} [t \cos kt]_0^{\pi} = \frac{j}{k\pi} \pi \cos n\pi = j \frac{(-1)^k}{k}
\end{aligned}$$

したがって  $f(t)$  の複素フーリエ級数表現は

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} j \frac{(-1)^k}{k} e^{jkt}$$

となる。

例 2 :

周期  $2\pi$  の関数

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t \leq 0 \\ 1, & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

を複素フーリエ級数展開する。

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 (-1) dt + \int_0^{\pi} dt \right\} = 0 \\
c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\{ -\int_{-\pi}^0 e^{-ikt} dt + \int_0^{\pi} e^{-ikt} dt \right\}
\end{aligned}$$

こう進めてもいいが、 $f(t)$  は奇関数なので、その特徴を活かすべく、偶関数と奇関数に分解。

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos kt - i \sin kt) dt \\
&= -\frac{i}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \sin kt dt \right\} \\
&= \frac{i}{\pi} \left[ \frac{1}{n} \cos kt \right]_0^{\pi} = \frac{i}{n\pi} ((-1)^n - 1) \quad n \text{ が偶数のとき } 0, n \text{ が奇数のとき } -2
\end{aligned}$$

したがって  $f(t)$  の複素フーリエ級数表現は

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} e^{ikt} = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} i \frac{2}{(2m-1)\pi} e^{i(2m-1)t}$$

となる．よくわからないので具体的に  $m = -2, -1, 0, 1, 2, 3$  代入して分解してみよう．

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} e^{ikt} \\ &= \cdots + i \frac{2}{5\pi} e^{-i5t} + i \frac{2}{3\pi} e^{-i3t} + i \frac{2}{\pi} e^{-it} - i \frac{2}{\pi} e^{it} - i \frac{2}{3\pi} e^{i3t} - i \frac{2}{5\pi} e^{i5t} + \cdots \end{aligned}$$

これは例えば

$$i \frac{2}{5\pi} e^{-i5t} - i \frac{2}{5\pi} e^{i5t} + \cdots = \frac{i2}{5\pi} \{e^{-i5t} - e^{i5t}\} = \frac{i2}{5\pi} \{-2i \sin 5t\} = \frac{4}{5\pi} \sin 5t$$

となるので，

$$f(t) \sim \cdots + \frac{4}{\pi} \sin t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \sin 5t + \cdots$$

これは，もちろん通常のフーリエ級数と同じになる（教科書 p.15 式 1.34）

例 3：

周期  $2\pi$  の関数  $f(t) = t^2$  の複素フーリエ級数を区間  $-\pi < t \leq \pi$  で求める．

$f(t)$  を  $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{ikt}$  と複素フーリエ級数表現するとき，その係数  $c_n$  は

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

と計算できる．具体的には，

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3} \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \left( -\frac{1}{in} e^{-ikt} \right)' dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[ t^2 \left( -\frac{1}{in} e^{-ikt} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2t \left( -\frac{1}{in} e^{-ikt} \right) dt \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{\pi^2}{in} (e^{-in\pi} - e^{in\pi}) + \frac{2}{in} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-ikt} dt \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{2\pi^2 \sin n\pi}{n} + \frac{2}{in} \int_{-\pi}^{\pi} t \left( -\frac{1}{in} e^{-ikt} \right)' dt \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{2\pi^2}{n} \sin n\pi + \left[ \frac{2te^{-ikt}}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n^2} e^{-ikt} dt \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{2}{n^2} [\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}] + \frac{2}{in^3} [e^{-ikt}]_{-\pi}^{\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{4\pi}{n^2} \cos n\pi + \frac{4i}{n^3} \sin n\pi \right\} \\ &= \frac{2 \cos n\pi}{n^2} = \frac{2(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

したがって  $f(t)$  の複素フーリエ級数表現は

$$f(t) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{ikt}$$

となる。