

フーリエ変換 その 1 フーリエ級数からフーリエ変換へ

今日の目標

復習

1. 5.5 パーシバルの定理
2. 周期

今までは表現したい関数（信号）の周期が 2π であると仮定してきた．周期的でない信号を扱いたい場合，どうするればいいのか． \Rightarrow 周期 $T = \infty$ と考えればよい．

（基本周期： t が 0 からどこまで変われば \cos の中身が 2π 変化するか）

基本周期	
$\cos t$	2π
$\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$	T

以下の項については，教科書に分かりやすい記述がある．このノートは補足程度．

7.1 フーリエ級数からフーリエ変換へ

$\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$ を使って関数 $f(t)$ を表現し， T を ∞ にする．

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2k\pi}{T}t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} dt$$

$\omega_k = \frac{2k\pi}{T}$ と書くと，これは

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_k t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_k t} dt$$

と書ける．いきなりではあるが，フーリエ変換の式と見比べてみる．

$$\text{フーリエ逆変換} : f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad \text{フーリエ変換} : F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

フーリエ級数の式で， $\frac{1}{2\pi}$ との対応をつけるため， $\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{T}$ ， $C_k = \frac{F(\omega_k)}{T}$ と書く
と，これは

$$f(t) = \frac{T}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega_k)}{T} e^{j\omega_k t} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega_k) e^{j\omega_k t} \Delta\omega$$

フーリエ変換の式は各基底ベクトル $e^{j\omega t}$ と関数 $f(t)$ の内積の式であり，角周波数成分を求める式になっている．フーリエ逆変換は，各基底ベクトル $e^{j\omega t}$ にその周波数成分の重み $F(\omega)$ をかけて足しあわせたもので $f(t)$ を再構成する式である．

複素フーリエ級数と，式を比較してみる．フーリエ逆変換はこれにそっくり． $k \rightarrow \omega, C_k \rightarrow F(\omega)$ になっている．離散変数が連続変数になっている．

一般に $F(\omega)$ は複素数値関数。
 ω は連続角周波数（実数）。
 フーリエ変換は、絶対積分可能

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

であるときに存在する。

フーリエ変換とフーリエ逆変換の大雑把な理解

1. 1対1の変換 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, $-\infty < t, \omega < \infty$ （逆変換すればもとに戻せる）
 2次元平面に漂う一本のヒモが、3次元空間に漂う一本のヒモに変換される。
 横軸 t, ω は $-\infty$ から ∞ に走るのので、 $\vec{f} \leftrightarrow \vec{F}$ という表現もできる。
2. 例：音声信号のような1次元の実数値関数 $f(t)$ は2次元平面上に1本の曲線として表現されている。その $f(t)$ フーリエ変換 $F(\omega)$ は、3次元空間中に漂う1本の曲線で表現される。線から線への一対一の写像（線を点とみる）になっている。
3. 同じ実体について（2つの）異なった表現方法がある：時間領域での表現 $f(t)$ と周波数領域での表現 $F(\omega)$ 。
4. フーリエ変換：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad F(\omega) \text{ は通常, 複素数値をもつ関数になる。}$$

5. フーリエ逆変換：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

6. 良く見れば行列との対応関係がとれる：フーリエ変換は線形代数で考えると行列とベクトルの積

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = f_1 e_1 + f_2 e_2 + \dots + f_n e_n = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F(\omega_1) \\ F(\omega_2) \\ \vdots \\ F(\omega_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\omega_1 t_1} & e^{-j\omega_1 t_2} & \dots & e^{-j\omega_1 t_n} \\ e^{-j\omega_2 t_1} & e^{-j\omega_2 t_2} & \dots & e^{-j\omega_2 t_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{-j\omega_n t_1} & e^{-j\omega_n t_2} & \dots & e^{-j\omega_n t_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{bmatrix}$$

（この n^2 回の掛け算を $n/2 \log_2 n$ 回で済ませるのが高速フーリエ変換）

フーリエ変換の計算

教科書の図を注意してみる。 $f(t)$ は実数値関数であるので $-\infty < t < \infty$ で2次元の図で書ける。一方、 $F(\omega)$ は複素数値関数であり、 $-\infty < \omega < \infty$ で3次元のグラフなる。

1a)

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$$

のフーリエ変換 .

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} \left[e^{-(a+i\omega)t} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} \left[e^{-at} e^{-i\omega t} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} \left[e^{-at} (\cos \omega t - i \sin \omega t) \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a+i\omega} \\ &= \frac{a-i\omega}{(a+i\omega)(a-i\omega)} \\ &= \frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2} \end{aligned}$$

2)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a \\ 0, & |t| > a \end{cases} \quad (a > 0)$$

のフーリエ変換 (教科書 p,125 . 図 7.2 g,h に $a = 1$ のときの図が掲載されている) .

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-a}^a (\cos \omega t - i \sin \omega t) dt \\ &= 2 \int_0^a (\cos \omega t) dt \\ &= \frac{2}{\omega} [\sin \omega t]_0^a \\ &= \frac{2}{\omega} \sin \omega a \\ &= \frac{2a}{a\omega} \sin \omega a = 2a \operatorname{sinc} a\omega \end{aligned}$$

偶然 , $F(\omega)$ が実数値関数になっている .

来週

7.2 フーリエ変換の性質