情報システム工学科
伊達 章

応用数学 2 第 12 回
2007 年 12 月 19 日

フーリエ変換 その3　　7.3 デルタ関数と白色雑音

本日

デルタ関数，線形時不変システム，インパルス応答，周波数特性，伝達関数，周波数特性の振幅と位相
（教科書にとても分かりやすい記述がある）

復習： フーリエ変換

フーリエ変換：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad F(\omega) \text{ は通常，複素数値をもつ関数になる．}$$

フーリエ逆変換：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

フーリエ変換の性質

- 線形性 (重ね合せの原理)
- 波形の移動.（変数シフト：時間シフト，空間シフト）
- 相似性
- 周波数シフト

$$\mathcal{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] \quad = \quad F(\omega-\omega_0)$$

これは周波数スペクトルを ω_0 だけ右にずらす操作．音声などの信号を想像すると，実数に複素数を掛け算するから実体としてはなんだかよくわからなくなる，実は，この性質は，無線通信において使用されている．信号 $f(t)$ に単に $e^{j\omega_0 t}$ を掛けた $f(t)e^{j\omega_0 t}$ では複素数の信号となってしまい実現できない．そこで cos や sin がこの形 ($e^{j\omega_0 t}$) の和や差で表現できることを思いだす．具体的には，もとの信号 $f(t)$ に，たとえば，$f(t)\cos t(\omega_0 t) = 1/2 f(t)(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})$ と掛け算する．これを変調という．復調はどうするか．実は，変調のときに使用した信号 (搬送波という．ここでは $\cos(\omega_0 t)$ ）と同じものを掛けてやれば，もとにもどる．その際，周波数領域でみると $2\omega_0$ 倍,$-2\omega_0$ 倍のところにもでてしまう．それはローパスフィルターで高周波成分を取り除いてやればいい．

- 微分，高階微分

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(t)] &= j\omega F(\omega)\\ \mathcal{F}[f^{(t)}(t)] &= (i\omega)^t F(\omega)\end{aligned}$$

定義にしたがって計算してみる．

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(t)] &= F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-j\omega t}dt\\ &= \left[f(t)e^{-j\omega t}\right]_{-\infty}^{\infty} + j\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\\ &= j\omega F(\omega) \qquad (1)\end{aligned}$$

ここで $\lim_{t\to\pm\infty} f(t)=0$ を使った．この性質のおかげで微分方程式が代数方程式になる．

- 対称性

$$g(t)\equiv F(t) \quad\rightarrow\quad G(\omega)=2\pi f(-\omega)$$

フーリエ変換したい関数を $g(t)$ とする．この $g(t)$ が，ある関数 $f(t)$ をフーリエ変換した結果 $F(\omega)$ と同じ形になっているとき，つまり $g(t)=F(t)$ のとき，わざわざ定義にもどって計算しなくてもいい．

7.3 デルタ関数と白色雑音

- デルタ関数 $\delta(t)$ とは（復習）．

デルタ関数は $t=0$ に面積 1 が集中した関数.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dx=1$$

$$\delta(t)=0, t\neq 0$$

【解説】$t=0$ 以外では値 0 をとる関数である．このような関数を 0 を含む区間で積分すると，普通の関数であれば 0 となる．ところがデルタ関数はそうはならない．そうならないことが定義 $\int_{\infty}^{\infty}\delta(t)dx=1$ である．$\delta(0)$ の値は無限大のようなものであるが，特定することはできない．ただし，$2\pi\delta(t)$ などという表現もこの後，登場する．おかしい点もでてくると思うが，そうなると思って話を進めても何の不都合もおこらない．

- デルタ関数のフーリエ変換

フーリエ変換は関数から関数への写像で区分的なめらかでかつ絶対積分可能な関数であればフーリエ変換 (関数から関数への一対一写像）できた．デルタ関数はその定義からして絶対積分可能である．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt \quad=\quad 1 \tag{2}$$

デルタ関数のフーリエ変換は

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\delta(t)] &= & (3)\\
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt & (4)\\
&= e^{-j\omega t}|_{t=0} & (5)\\
&= 1 & (6)
\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)dt \quad=\quad f(0) \tag{7}$$

というデルタ関数の性質を用いた．次に，この結果をフーリエ逆変換

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{8}$$

できたとするとデルタ関数にもどるはずなので，

$$
\begin{aligned}
\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[\delta(t)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega && (9)\\
&= \underline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}d\omega} && (10)
\end{aligned}
$$

となる． これはデルタ関数の積分を使った表現と思っていい．複素指数関数を $-\infty$ から ∞ まで積分するとデルタ関数の 2π 倍

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}d\omega = 2\pi\delta(t) \tag{11}
$$

となる (これは定義のようなものと思えばいい）．次に，デルタ関数は偶関数という性質 $\delta(t) = \delta(-t)$ を使うと，

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}d\omega = 2\pi\delta(t) \tag{12}
$$

も成り立つ．この二つの式は今後よく使うようになる．

- 定数 1 のフーリエ変換

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[1] &= && (13)\\
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}dt = 2\pi\delta(\omega) && (14)
\end{aligned}
$$

デルタ関数をフーリエ変換したら 1 になった．その知識があれば，1 をフーリエ変換すると，デルタ関数 (の定数倍）になることは，フーリエ変換の性質 (フーリエ変換の対称性）を知っていればわかる．この式は先にもでてきたが，積分表現をつかったデルタ関数の定義だと思えばいい．

- 余弦関数，正弦関数のフーリエ変換

まず $e^{-j\omega_0 t}$ のフーリエ変換を計算しておこう．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}] &= && (15)\\
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt && (16)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_0+\omega)t}dt && (17)\\
&= 2\pi\delta(\omega_0+\omega) && (18)
\end{aligned}
$$

最後の等号は式 (10) の結果をもちいた． この結果を用いて，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[\cos\omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right] && (19)\\
F(\omega) &= \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}] && (20)\\
&= \pi(\delta(\omega_0-\omega)+\delta(\omega_0+\omega)) && (21)
\end{aligned}
$$

となる．