

## 講義の全体像: ベクトルとその応用

### 線形代数 理工系数学の華

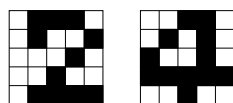
- 担当教員：伊達 章
- 連絡先：A-423, date@cs.miyazaki-u.ac.jp, 内線 7986
- 成績の評価方法：期末試験 80%, 小テスト（演習問題）20%
- 教科書：「工科系 線形代数」筧三郎著 . 参考書：
- 内容に関する質問について：
  - オフィスアワー：木曜日 16:30–17:30 .
  - 講義中の質問も歓迎 → ほかの人の理解の助けにもなる

### 講義の内容

- 4, 線形空間
  - 4.1 幾何ベクトルと数ベクトルの対応
  - 4.2 線形空間
  - 4.3 線形空間の基底
  - 4.4 1次独立性と行列式
  - 4.5 計量線形空間
  - 4.6 グラムシュミットの直交化
- 5. 線形写像
- 6. 固有値・固有ベクトル 線形代数の中心
  - 「物事を固有ベクトル方向に分けて考えると後の話が単純になる」
  - このからくりを理解できれば OK

### 何の役にたつのか, 関連する科目

- 音・音声の表現, 画像の表現, 時系列信号の解析  
音声, 画像がなぜベクトルか .  
画像の例:  $5 \times 5 = 25$  次元ベクトル . 2値 .  $2^{25}$  とおり .

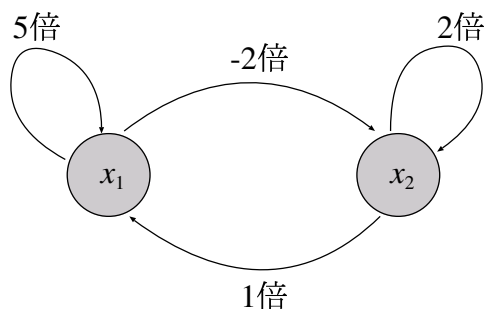


$$x = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)^T$$

- パターン認識：  
入力: 25次元ベクトル  $x \rightarrow 0 \sim 9$  (テンプレートに一番近いものを選ぶ)
- 応用数学2, 確率論と情報理論, ...

固有値，固有ベクトルとは

問題：20回更新した後の状態を求めたい



$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A\mathbf{x}$$

具体的な値を代入し，各自，できるところまで計算してみる． $\mathbf{x} \dots$  初期状態． $\mathbf{x}^{(20)}$  20回後．

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}'' &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ -10 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}''' &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 37 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 175 \\ -94 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(20)} &= \left( \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \right)^{20} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \dots \end{aligned}$$

$n$ 回あとの状態を求めるのに，何回掛け算と足し算が必要か  $\rightarrow 4n$ 回の掛け算と  $2n$ 回の足し算．

手品のはじまり

$\mathbf{x} = P\mathbf{y}$  と座標変換して  $\mathbf{y}$  で考える．

$$\bullet \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 \\ 2x_2 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

疑問：「 $P$ をどう決めたか」 $\rightarrow$  保留． $\mathbf{y}', \mathbf{y}'', \mathbf{y}'''$  を求めてみる．

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 16 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\mathbf{y}'' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 37 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ 64 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{y}''' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 175 \\ -94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -81 \\ 256 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$x$  より  $y$  で考えた方が計算がとても簡単． $y$  でシステムの状態を考えると，1時刻あとでは  $y_1$  が3倍， $y_2$  が4倍されている．実は，この3と4が固有値．

もとの戻す方法： $x = Py$  なので， $x^{(n)} = Py^{(n)}$  として求まる．

種明かし：変換の行列  $P$  の選び方

変換後に

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \Lambda \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3y_1 \\ 4y_2 \end{bmatrix}$$

となるような  $a, b, c, d$  を求めてみると，3, 0, 0, 4．

$$\mathbf{y}'' = \begin{bmatrix} y''_1 \\ y''_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3y_1 \\ 4y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \Lambda \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 9y_1 \\ 16y_2 \end{bmatrix}$$

$x, x', x'' \dots$  および  $y, y', y'' \dots$  を2次元の座標平面で書いてみる． $y$  の時間発展が対角行列で表現できるようになれば好ましい．

$$\mathbf{y}' = \Lambda \mathbf{y} \quad (4)$$

これを  $x' = Ax$  の形にもっていこう ( $A$  は与えられている)．

$$P^{-1}x' = \Lambda P^{-1}x \quad (5)$$

$$x' = P\Lambda P^{-1}x \quad (6)$$

これが  $x' = Ax$  であればいい．与えられている  $A$  を元に，

$$A = P\Lambda P^{-1} \quad (7)$$

となるよう，行列  $P$  と対角行列  $\Lambda$  を求めればいい．右から  $P$  をかけて

$$AP = P\Lambda \quad (8)$$

となる． $P$  を縦ベクトル2つを横に並べたものとみて， $P = [e_1 e_2]$ ， $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$  とおくと，この式は

$$A [e_1 e_2] = [e_1 e_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[Ae_1 Ae_2] = [\lambda_1 e_1 \lambda_2 e_2] \quad (10)$$

となり，

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1, \quad Ae_2 = \lambda_2 e_2$$

となる．この式を満たす  $e_1, e_2, \lambda_1, \lambda_2$  を求めれば， $P, \Lambda$  が分かる． $e_1, e_2$  を固有ベクトル， $\lambda_1, \lambda_2$  を固有値という．

$$\bullet x^{(n)} = A^n x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = P\Lambda^n \mathbf{y} = P\Lambda^n P^{-1}x$$

$P$  は固有ベクトルを並べた行列． $\Lambda$  は対応する固有値を対角上に並べた行列

定義

ある  $n$  次元正方行列  $A$  に対して,

$$Ax = \lambda x$$

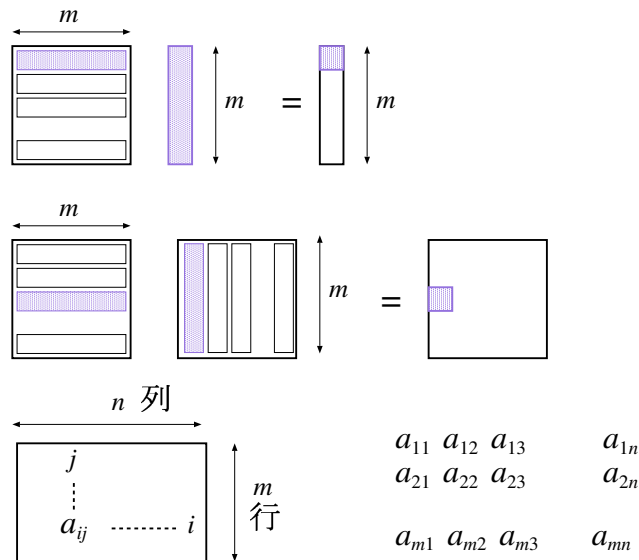
をみたす  $n$  次元ベクトル  $x(x \neq 0)$  と数  $\lambda$  が存在するとき,

1.  $\lambda$  を 行列  $A$  の固有値
2.  $x$  を 固有値  $\lambda$  に対する固有ベクトル  
 という. 固有ベクトルは,  $\lambda$  が実数のとき,  $A$  という行列をかけても方向が変わらないベクトルと解釈できる.

復習: ベクトル: 内積, 線形結合, 行列の演算

- 線形とは  
 「1次」と「線形」は同じ意味)
- 基本は縦ベクトル
- 行列の演算

視覚イメージ: 行列の掛け算



例:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix} \quad (11)$$

1. 横ベクトル  $\times$  縦ベクトルが数.
2. 正方行列の掛け算の場合, 前側の行列を横ベクトル, 後ろを縦ベクトルの集まりだと考える. 掛け算した結果も縦ベクトルの集まりと考える.

$$x^T Ax = \text{数}.$$