

## 線形空間 その1

### 4.1 幾何ベクトルと数ベクトルの対応

#### 4.1.1 幾何ベクトル

#### 4.1.2 数ベクトルとの対応

### 4.2 一般の線形空間

### 4.3 線形空間の基底

### 4.4 1次独立性と行列式

### 4.5 計量線形空間

### 4.6 グラムシュミットの直交化

復習：横ベクトル×縦ベクトル=数．逆は行列．視覚イメージをもっておく．

例： $x^T Ax$  は数． $xx^T$  は行列． $xx^T(I + yy^T)x$  は？  $x^T(A + yy^T)x$  は？

4.1 ~ 4.6

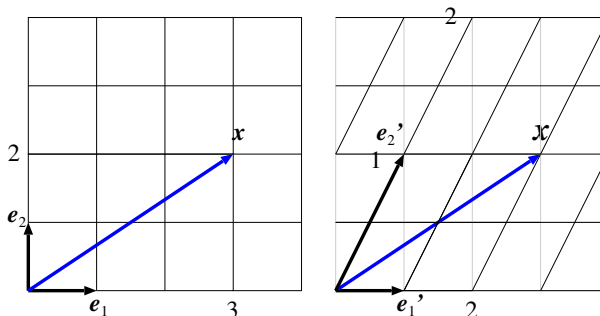
ベクトルの概念の一般化

ベクトルはどのような性質を持つか：「和とスカラー倍に関して閉じている」

### 4.1 幾何ベクトルと数ベクトルの対応

#### 4.1.1 幾何ベクトル： $\vec{x}$

高校の復習．ただし，座標を使っていないことに注意．



$$\vec{x} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = 2\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2$$

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{e}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x$  自身は，どの基底で表しても同じものであるから

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^n x'_i \mathbf{e}'_i$$

#### 4.1.2 数ベクトルとの対応

数ベクトル： $x$  .

例： $x \in \mathcal{R}^4$  .  $\leftarrow x$  が集合  $\mathcal{R}^4$  の元であること

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \text{場所をもたないないので } x^T = [2, 3, 5, 8] \text{ と書く. } T \text{ は転置}$$

$n$  次元列ベクトル： $n$  個の実数を縦に並べたもの

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

上から順に，第 1 成分，第 2 成分， $\dots$  . 特に断らない限り，数ベクトルといったら縦ベクトル .

例：平面の場合： $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$

$$\phi(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \phi(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(\vec{a}) = \mathbf{a}$$

難所： $\vec{a}$  と  $\mathbf{a}$  は違うものらしい .  $\vec{a}$  はベクトル， $\mathbf{a}$  は  $\vec{a}$  の成分表示 .

教科書によっては逆の書き方をしている場合がある .

#### $n$ 次元ユークリッド空間

以下のように  $n$  次元列ベクトル空間に内積，長さが定義された空間 .

内積： $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$

ベクトルの長さ (ノルム)： $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

#### 内積の性質

内積の公理：

- i. 線形性  $(c_1x_1 + c_2x_2, \mathbf{y}) = c_1(x_1, \mathbf{y}) + c_2(x_2, \mathbf{y})$
- ii. 対称性  $(x, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, x)$
- iii. 正値性  $(x, x) \geq 0$ ,  $0$  は  $x = 0$  のときに限る

公理は内積という演算の満たす性質を規程するだけ .

具体的には，この性質を満たせば，どのように定義してもよい .

通常，「物理的性質を上手に表現するように」決める .

「公理」とは：前提として仮定するいくつかの事柄

「定理」とは：複数の公理から論理的，数学的に導出される命題

「命題」とは：真か偽のどちらか（真理値）を決定しうる文

#### 4.2 一般の線形空間

線形空間（＝ベクトル空間）

ベクトルの概念の一般化

ベクトルに定数をかけてもベクトルが得られる．

2つのベクトルを加えてもベクトルが得られる．

「集合  $V$  は、定数倍と和に関して閉じている」

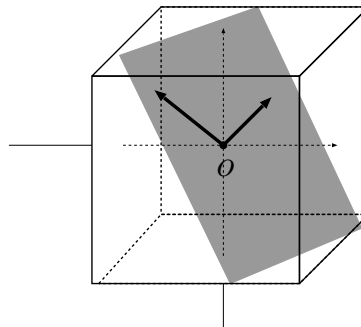
##### 例題 4.1

問題の意味を理解することで「線形空間」「線形部分空間」の概念を理解する．

平面か、空間の例題のほうがよくわかる．

(a) 部分空間：「和とスカラー倍に関して閉じている」

$u, v \in W, W \subset V$  とする．どんな  $u, v$  に対しても、 $u + v \in W$  かつ  $ku \in W$  が成り立つなら集合  $W$  を線形部分空間という．



#### 4.3 線形空間の基底

定義 4.2（1次従属，1次独立）

定義 4.3（線形空間の次元）

定義 4.4（線形空間の基底）

ベクトルの組  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  を考える．線形独立（1次独立）

どのベクトルも他のベクトルの線形結合で表せない． $\rightarrow$  ベクトルの組は1次独立．

線形従属（1次従属）

どれか一つのベクトルが他のベクトルの線形結合で表せる．

講義後メモ：ベクトルと行列の計算．ユークリッド空間の内積．4.2 例題 4.1 で本日は終わってしまった．次回 4.1.1 を、このメモの具体例で説明する．