情報システム工学科
伊達 章

線形代数 第 3 回
2007 年 10 月 22 日

線型空間 その 2

4.2 一般の線形空間

4.3 線形空間の基底

4.4 1 次独立性と行列式

4.5 計量線形空間

4.6 グラムシュミットの直交化

前回：
線形空間： ベクトルはどういう性質を持つか：「和とスカラー倍に関して閉じている」

用語：

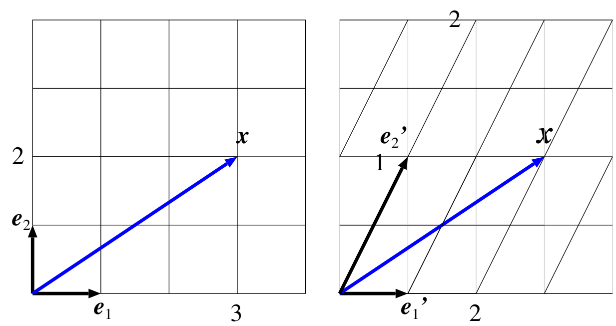
- 基底， 線形結合 ＝ 一次結合，
- 一次独立（線形独立），一次従属（線形従属）， 線形空間の次元
- 行列の次元，階数（ランク），前期： 行列式

今回： これらの概念の直観的な説明をおこなった．

4.3 線形空間の基底

（p.86-87： 一次従属，一次独立，線形空間の次元，線形空間の基底）

直観的な説明． まず本質を理解してから，教科書の定義を理解する．



図の $\boldsymbol{x}$ 点の座標：$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$ ．別の座標系で考えると $\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ ．
考えている座標系が違う → 基底ベクトル （basis vector） が違う．基底： 考える土台．

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x}$ の実体一つ． どの基底で表現しても同じ：

$$\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 = 2\boldsymbol{e}_1' + \boldsymbol{e}_2'$$

長さはどうなるのか．$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} \neq \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

答え：内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & c \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$ と定義すればよい．

定数は $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 1, (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 5, (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}') = 13$ となるように決めればいい．→計量線形空間

戻る： より一般的に書くと：

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{n} x_i' \boldsymbol{e}_i'$$

こういうものを基底ベクトルの 線形結合 という．

「この平面上のどんなベクトル $\boldsymbol{x}$ も，これらの基底ベクトルの線形結合で表現できる」

直観的には，これはあたりまえ．

特殊な状況をわざわざ考えてみる．

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2$$

基底ベクトルは，同じく 2 本ある．→ 平面上のどんなベクトルも表現できるか
a, b をいろいろな値に変えてみる． → 直線の外の点は表現できない．
→ この空間は，一次元（直線上）の空間． ベクトル空間の次元．

ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$ を考える．線形独立（1 次独立）

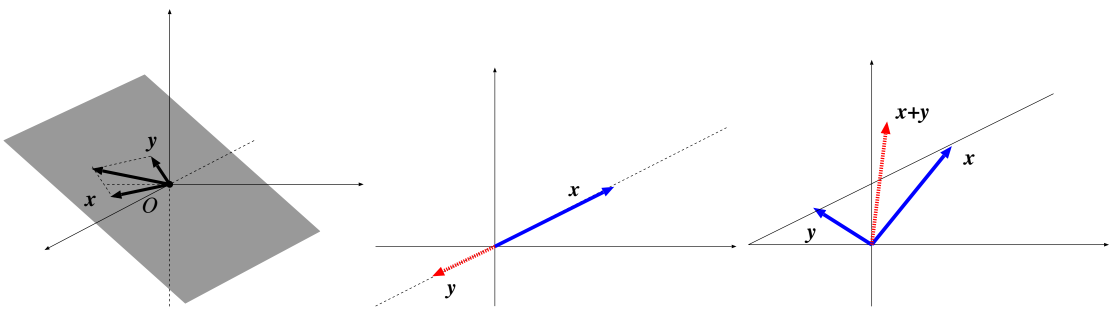
どのベクトルも他のベクトルの線形結合で表せない．→ ベクトルの組は 1 次独立．

線形従属（1 次従属）： どれか一つのベクトルが他のベクトルの線形結合で表せる．

- 線形結合（一次結合）
  $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + \cdots c_r\boldsymbol{v}_r$

定義

線形空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ を用いて，V の任意のベクトルを 1 次結合として表すことができるとき，ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は線形空間 V を**張る**という．



「$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の張る空間」

復習： ベクトル空間（線形空間）とは集合 V：$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V, a\boldsymbol{x} \in V$
「集合 V は，定数倍と和に関して閉じている」

(a) 部分空間（例題 4.1）： 「和とスカラー倍に関して閉じている」
$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$, $W \subset V$ とする．どんな $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対しても，$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in W$ かつ $k\boldsymbol{u} \in W$ が成り立つなら集合 W を線形部分空間という．

- 例
  R^3 内の原点を通る平面や直線は，R^3 の部分空間になっている．

片方を，もう一方（残りのベクトル）の線形結合で書ける．→ $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ は線形従属．
片方を，もう一方（残りのベクトル）の線形結合で書けない．→ $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ は線形従属．
定義 4.4 （p.87）によると，線形独立でないと基底ベクトルとは，呼べない．
定義： 線形空間 $\mathcal{V}$ の次元 （p.87）

4.4 1 次独立性と行列式
4.4 1 次独立性

- 線形独立（一次独立）
  どのベクトルも他のベクトルの線形結合で表せないならば，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$ は 線形独立（一次独立）であるという．
- 線形従属（一次従属）
  どれか一つのベクトルが他のベクトルの線形結合で表せる．

例題 4.5 は重要．例題 4.6 (2) は知らない解けない．

4.5 計量線形空間

内積の性質
内積の公理：

(a) 線形性 $(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = c_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + c_2(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$
(b) 対称性 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$
(c) 正値性 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$, 0 は $\boldsymbol{x} = 0$ のときに限る

計量線形空間： 内積が定義された線形空間のこと．

自分自身との内積でベクトルのノルム（長さ）を定義する．

$$||\boldsymbol{x}||^2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

したがって自分自身との内積は正になるよう内積を定義する．複素数の場合．

例：$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$

$$||\boldsymbol{a}||^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = 1 - 1 = 0$$

というのはおかしいので，

$$||\boldsymbol{a}||^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{a}} = 1 + 1 = 2$$

と一方の要素を複素共役をとり定義する．

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} = 1 + 2 = 3$$

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = 1 + 2 = 3$$

この場合は内積が実数値だったので $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ が成り立っている．
<u>正規直交基底</u>

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

どの基底ベクトルも長さが 1 で，どの基底ベクトル同士も互いに直交している．
とてもよい性質がある．

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_1 = (a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = (a\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + (b\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = a(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = a$$

ふつうの平面座標でも，正規直交基底のとり方は無数にある．