

線形空間 その3

- 4.2 一般の線形空間
- 4.3 線形空間の基底
- 4.4 1次独立性と行列式
- 4.5 計量線形空間
- 4.6 グラムシュミットの直交化

前回：

線形空間：ベクトルはどのような性質を持つか：「和とスカラー倍に関して閉じている」

(p.86-87：一次従属，一次独立，線形空間の次元，線形空間の基底)

直観的な説明．まず本質を理解してから，教科書の定義を理解する．

用語：

- 基底，線形結合 = 一次結合，
- 一次独立（線形独立），一次従属（線形従属），線形空間の次元
- 行列の次元，階数（ランク），前期：行列式

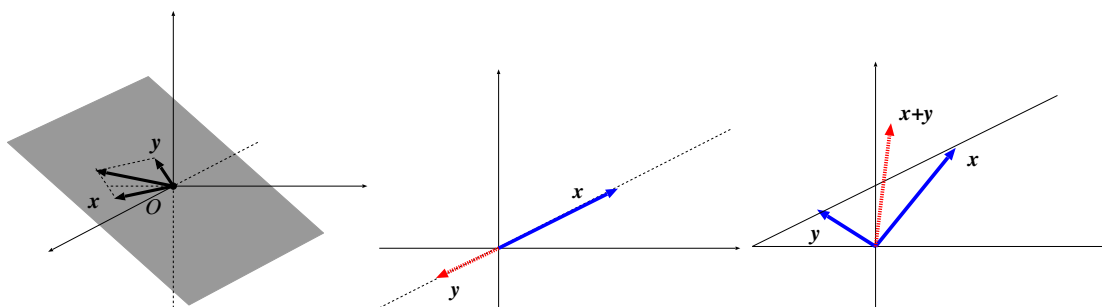
4.3 線形空間の基底

- 線形結合（一次結合）

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \cdots + c_r v_r$$

定義

線形空間 V のベクトル v_1, v_2, \dots, v_r を用いて， V の任意のベクトルを1次結合として表すことができるとき，ベクトル v_1, v_2, \dots, v_r は線形空間 V を張るといふ．



「 x, y の張る空間」

例題 4.1 (p.81) の易しい版．

数ベクトル空間 \mathcal{R}^2 に対して、以下で定義する部分集合 V_1, V_2 が線形部分空間であるかどうか調べ、線形部分空間であれば空間の次元を求めよ。ただし数ベクトルの加法・定数倍は \mathcal{R}^2 と同じく、各成分ごとの加法・定数倍とする。

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^2 \mid x + 2y = 0 \right\} \quad (1)$$

$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^2 \mid x + 2y = 2 \right\} \quad (2)$$

【解答】

(1)

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ が集合 V_1 の元である。すなわち、

$$\begin{cases} x_1 + 2y_1 = 0 \\ x_2 + 2y_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

が同時に成り立つとする。このとき a, b を実数として、 $a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2$ を考えると

$$(ax_1 + bx_2) + 2(ay_1 + by_2) = 0$$

が成立し、 $a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2 \in V_1$ が示されるので V_1 は線形部分空間である。

(2)

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ が集合 V_2 の元である。このときは

$$\begin{cases} x_1 + 2y_1 = 2 \\ x_2 + 2y_2 = 2 \end{cases} \quad (4)$$

が同時に成り立つ。 $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ を考え、上式の左辺に当てはめると、

$$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2)$$

となる。この値は先の2つの式を足して得られ

$$(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = 4$$

となり、集合 V_2 の要素であれば2でなければならないが4になる。すなわち $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in V_2$ とはならないので、 V_2 は線形部分空間ではない。

復習：ベクトル空間（線形空間）とは集合 $V : \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \mathbf{x} + \mathbf{y} \in V, a\mathbf{x} \in V$
「集合 V は、定数倍と和に関して閉じている」

(a) 部分空間（例題 4.1）：「和とスカラー倍に関して閉じている」

$u, v \in W, W \subset V$ とする。どんな u, v に対しても、 $u + v \in W$ かつ $ku \in W$ が成り立つなら集合 W を線形部分空間という。

- 例

R^3 内の原点を通る平面や直線は, R^3 の部分空間になっている.

片方を, もう一方(残りのベクトル)の線形結合で書ける. e_1 と e_2 は線形従属.

片方を, もう一方(残りのベクトル)の線形結合で書けない. e_1 と e_2 は線形従属.

4.4 1次独立性与行列式

4.4 1次独立性

- 線形独立(一次独立)

どのベクトルも他のベクトルの線形結合で表せないならば, ベクトルの組 $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ は線形独立(一次独立)であるという.

- 線形従属(一次従属)

どれか一つのベクトルが他のベクトルの線形結合で表せる.

例題 4.5 は重要. 例題 4.6 (2) は知らない解けない.

$$k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + k_3 \mathbf{a}_3 + \dots + k_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{k} = \mathbf{0}$$