情報システム工学科
伊達 章

線型空間 その4

4.3 線形空間の基底

4.4 1次独立性と行列式

4.5 計量線形空間

4.6 グラムシュミットの直交化

前回：
1次独立性と行列式
用語：

- 基底， 線形結合 ＝ 一次結合，
- 一次独立（線形独立），一次従属（線形従属）， 線形空間の次元
- 行列の次元，階数（ランク），前期： 行列式

4.4 1次独立性と行列式

4.4 1次独立性

- 線形独立（一次独立）
  どのベクトルも他のベクトルの線形結合で表せないならば，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$ は 線形独立（一次独立）であるという．
- 線形従属（一次従属）
  どれか一つのベクトルが他のベクトルの線形結合で表せる．

例題 4.5 は重要．例題 4.6 (2) は知らない解けない．

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + k_3\boldsymbol{a}_3 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$

行列 A の列空間：A の列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ によって張られる空間．

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

行列 A の列空間の次元 （= 行空間の次元）を A の階数（Rank）という．

ランク（階数）

m 本の n 次元ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ を列とする $n \times m$ 行列を $A = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m)$ と書く．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ のうち，線形独立なものの個数を行列 A のランク（または階数）と呼ぶ．

$n \times n$ 行列 A に関する次の条件はすべて同値

(a) A のランクが n である．

(b) 行列式 $|A|$ が 0 でない．$|A| \neq 0$.

(c) 逆行列 A^{-1} が存在する．

問：

次の条件を満たす線形従属な 4 次元ベクトル 4 本を例示せよ，それらをどう作成したか，説明せよ．

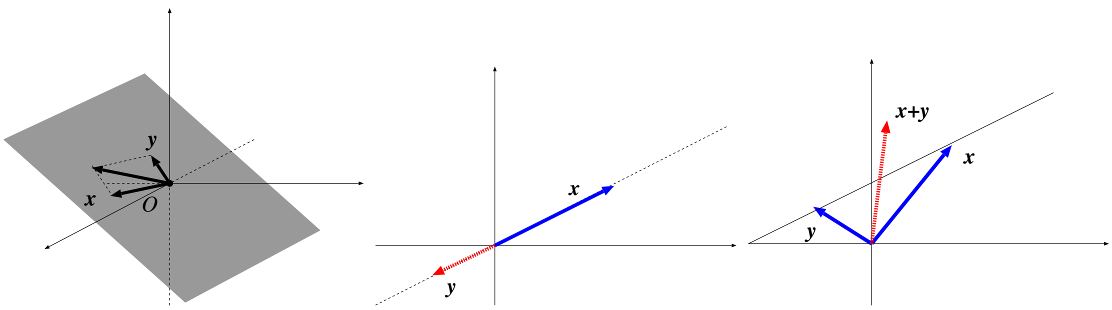
それらが張る空間の次元が 3.
それらが張る空間の次元が 2
それらが張る空間の次元が 1.
それらが張る空間の次元が 0.

$k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + k_3\boldsymbol{e}_3 + k_4\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{0}$ として，$k_1, k_2, \cdots$ を書け．

4.3 線形空間の基底

<u>定義</u>

線形空間 V のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を用いて，V の任意のベクトルを 1 次結合として表すことができるとき，ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ は線形空間 V を**張る**という．



「$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の張る空間」

片方を，もう一方（残りのベクトル）の線形結合で書ける．→ $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は線形従属．
片方を，もう一方（残りのベクトル）の線形結合で書けない．→ $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は線形従属．

定義 4.4 （p.87）によると，線形独立でないと基底ベクトルとは，呼べない．

例題 4.4．例題 4.1 (1) の線形空間 V_1 に対して基底を一組求め，V_1 の次元を求めよ．

定義： 線形空間 $\mathcal{V}$ の次元 （p.87）

$\boxed{\text{線形空間 } \mathcal{V} \text{ の基底を構成する元の個数 } n\text{．} \dim \mathcal{V} = n \text{ と表す．}}$

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w & = 0 \quad \cdots ① \\ 3x + y + 2z + w & = 0 \quad \cdots ② \end{cases}$$

② → ② − ① × 3

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w & = 0 \quad \cdots ① \\ 0x - 5y - 7z - 11w & = 0 \quad \cdots ② \end{cases}$$

もうこれ以上進めない．仕方がないので，$z = s, w = t$ とおくと，$y = -(7s + 11t)/5$

① → ① + ② × 2/5

$$\begin{cases} x + 0y + (-14/5 + 3)z + (-22/5 + 4)w & = 0 \quad \cdots ① \\ 0x - 5y - 7z - 11w & = 0 \quad \cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 0y + \frac{1}{5}z + -\frac{2}{5}w & = 0 \quad \cdots ① \\ 0x - 5y - 7z - 11w & = 0 \quad \cdots ② \end{cases}$$

未知変数の数 4． 式の数 2．2 つ式が足らない．$z = s, w = t$ と置くと，

$$x = \frac{-s + 2t}{5}, y = \frac{-7s - 11t}{5}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ -7/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 2/5 \\ -11/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

教科書の解答と合わせるのであれば，$s = -5s', t = -5t'$ とする．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} s' + \begin{bmatrix} -2 \\ 11 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} t'$$

4.5 計量線形空間

内積の性質

内積の公理：

(a) 線形性 $(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = c_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + c_2(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$

(b) 対称性 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

(c) 正値性 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \geqq 0$, 0 は $\boldsymbol{x}=0$ のときに限る

公理は内積という演算の満たす性質を規程するだけ.
具体的には，この性質を満たせば，どのように定義してもよい.
→ 通常,「物理的性質を上手に表現するように」決める.

※「公理」とは： 前提として仮定するいくつかの事柄
※「定理」とは： 複数の公理から論理的，数学的に導出される命題
※「命題」とは： 真か偽のどちらか（真理値）を決定しうる文

計量線形空間： 内積が定義された線形空間のこと.

自分自身との内積でベクトルのノルム（長さ）を定義する.

$$||\boldsymbol{x}||^2 = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$$

したがって自分自身との内積は正になるよう内積を定義する．複素数の場合.

例：$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$

$$||\boldsymbol{a}||^2 = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = 1-1=0$$

というのはおかしいので,

$$||\boldsymbol{a}||^2 = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{a}} = 1+1=2$$

と一方の要素を複素共役をとり定義する.

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} = 1+2=3$$

$$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = 1+2=3$$

この場合は内積が実数値だったので $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$ が成り立っている.

<u>正規直交基底</u>

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

どの基底ベクトルも長さが 1 で，どの基底ベクトル同士も互いに直交している.

とてもよい性質がある.

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_1 = (a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = (a\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + (b\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = a(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = a$$

ふつうの平面座標でも，正規直交基底のとり方は無数にある.