情報システム工学科　　　　　　　　　　　　　　　　　　線形代数 第 6 回
伊達 章　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2007 年 11 月 12 日

線型空間 その 5

4.4 1 次独立性と行列式

4.5 計量線形空間

4.6 グラムシュミットの直交化

前回：
　ランク，内積，計量線形空間
用語：

- 基底，　線形結合 ＝ 一次結合,
- 一次独立（線形独立），一次従属（線形従属），　線形空間の次元
- 行列の次元，階数（ランク），前期： 行列式

4.4 1 次独立性と行列式

4.5 計量線形空間

内積の公理：

(a) 線形性 $(c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = c_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + c_2(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$
(b) 対称性 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$
(c) 正値性 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$, 0 は $\boldsymbol{x} = 0$ のときに限る

公理は内積という演算の満たす性質を規程するだけ.
具体的には，この性質を満たせば，どのように定義してもよい.
→ 通常,「物理的性質を上手に表現するように」決める.

※「公理」とは： 前提として仮定するいくつかの事柄
※「定理」とは： 複数の公理から論理的，数学的に導出される命題
※「命題」とは： 真か偽のどちらか（真理値）を決定しうる文

計量線形空間： 内積が定義された線形空間のこと.

自分自身との内積でベクトルのノルム（長さ）を定義する.

$$||\boldsymbol{x}||^2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

したがって自分自身との内積は正になるよう内積を定義する．複素数の場合.

例：$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$

$$||\boldsymbol{a}||^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = 1 - 1 = 0$$

というのはおかしいので，

$$||\boldsymbol{a}||^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{a}} = 1 + 1 = 2$$

と一方の要素を複素共役をとり定義する．

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} = 1 + 2 = 3$$

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = 1 + 2 = 3$$

この場合は内積が実数値だったので $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ が成り立っている．

<u>正規直交基底</u>

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

どの基底ベクトルも長さが 1 で，どの基底ベクトル同士も互いに直交している．

とてもよい性質がある．

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_1 = (a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = (a\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + (b\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = a(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + b(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = a$$

ふつうの平面座標でも，正規直交基底のとり方は無数にある．

例 1,2：（略）

関数 $f(t)$ は，例えば $1 \leqq t \leqq 10$ の範囲で，ベクトルと思っていい．要素が無数にあるので，無限次元ベクトルになる．その場合，内積をどう定義するか．→ 公理さえ満たせば，どう定義してもいい．

<u>直交補空間</u>

例題 4.8

4 次元空間の中の 2 次元部分空間 W．そのベクトルすべてに直交するベクトルの集合．

計算過程を補う．

1 本目 $\boldsymbol{u}_1$ は自由に選んでいいので $x_4 = 0$ として長さを 1 にする．2 本目 $\boldsymbol{u}_2$ は，自由に選べない．$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} s+t \\ s+t \\ 2s \\ 2t \end{bmatrix}$ でもいいが，$\boldsymbol{u}_1$ に計数 $1/\sqrt{6}$ がついているので $\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} s+t \\ s+t \\ 2s \\ 2t \end{bmatrix}$ とおく．

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} s+t \\ s+t \\ 2s \\ 2t \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \frac{1}{6}(2s + 2t + 4s) = \frac{1}{6}(6s + 2t) = s + \frac{t}{3} = 0$$
$$(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2) = (2(s+t)^2 + 4s^2 + 4t^2)/6 = s^2 + \frac{2st}{3} + t^2 = 1$$

$t = -3s$ を代入し，

$$\begin{aligned} s^2 - 2s^2 + 9s^2 &= 1 \\ 8s^2 &= 1 \\ s^2 &= \frac{1}{8} \\ s &= \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

s はどちらでもいい．いま

$$s = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, t = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

を採用したとすると，

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} s+t \\ s+t \\ 2s \\ 2t \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4.6 グラムシュミットの直交化

ベクトルの正規化

大きさが 1 でないベクトルの，方向を変えずに大きさを 1 にする方法

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||}$$

例．　$\boldsymbol{x} = (1, 2)^{\mathrm{T}}, ||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{5}$

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||} = \boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

大きさが 1 になっている．

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

<u>正規直交基底</u>

直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ によるベクトル $\boldsymbol{v}$ の表現

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2$$

$< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1 > = < k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 > = k_1 < \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 > + k_2 < \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 > = k_1 < \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 > = k_1||\boldsymbol{e}_1||^2$

<u>係数 k_1 の求め方</u>

$$< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1 > = k_1||\boldsymbol{e}_1||^2 \rightarrow k_1 = \frac{1}{||\boldsymbol{e}_1||^2} < \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1 >$$

特に，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が正規直交基底の場合．$||\boldsymbol{e}_1||^2 = 1$ より，$k_1 = < \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1 >$.

<u>正規直交基底の各基底に対する成分は内積を使って簡単に表現できる</u>

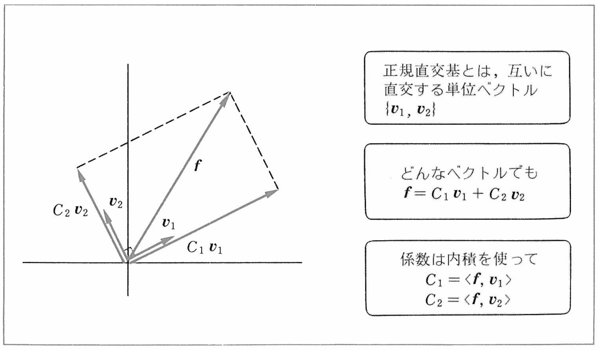

図 3・7 正規直交基でベクトルを表す

グラムシュミットの直交化法

2 次元の（簡単な）例.

与えられているもの (given)： 線形独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$
求めるもの (want) ： 正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$.

問題： 線形独立なことは分かっているので，互いが直交しており，長さが 1 のベクトルを求める.

(a) $\boldsymbol{v}_1 \Longrightarrow \boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{||\boldsymbol{v}_1||}$

(b) $\boldsymbol{v}_2$ の $\boldsymbol{e}_1$ 成分を求める． $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$

(c) したがって $\boldsymbol{v}_2$ の $\boldsymbol{e}_1$ に直交する成分のベクトルは $\boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$. このノルムを 1 に規格化したのが求める $\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1}{||\boldsymbol{v}_2 - ()\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1||}$.

(d) 3 次元以上の場合も，これと同じことを続けていく.
$\boldsymbol{v}_3$ の $\boldsymbol{e}_1$ 成分を求める． $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$
$\boldsymbol{v}_3$ の $\boldsymbol{e}_2$ 成分を求める． $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$
したがって $\boldsymbol{v}_3$ の $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に直交する成分のベクトルは $\boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$. このベクトルのノルムを 1 に規格化したのが求める $\boldsymbol{e}_3$.