情報システム工学科
伊達 章

線形代数 第 7 回
2007 年 11 月 26 日

線型空間 その 6

4.6 グラムシュミットの直交化

前回：
　ランク，内積，計量線形空間
用語：

- 行列の次元，階数（ランク），前期： 行列式

4.6 グラムシュミットの直交化

ベクトルの正規化

大きさが 1 でないベクトルの，方向を変えずに大きさを 1 にする方法

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||}$$

例.　$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{5}$

$$\boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||} = \boldsymbol{x}^* = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

大きさが 1 になっている.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

<u>正規直交基底</u>

直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ によるベクトル $\boldsymbol{v}$ の表現

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2$$

$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1) = (k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = k_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + k_2(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = k_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = k_1||\boldsymbol{e}_1||^2$

<u>係数 k_1 の求め方</u>

$$\rightarrow k_1 = \frac{1}{||\boldsymbol{e}_1||^2}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1)$$

特に，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が正規直交基底の場合．$||\boldsymbol{e}_1||^2 = 1$ より $k_1 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1)$.

<u>正規直交基底の各基底に対する成分は内積を使って簡単に表現できる</u>

例.

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2$$

$$k_1 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1) = 1/\sqrt{2},\ k_2 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_2) = -1/\sqrt{2}$$

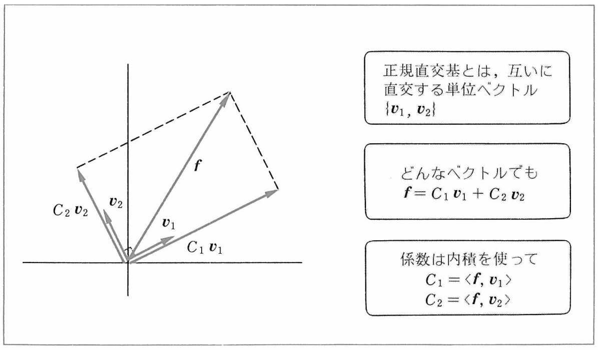


図 3・7　正規直交基でベクトルを表す

<u>グラムシュミットの直交化法</u>

例 (2 次元).

Given： ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$
Want ： 正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$.

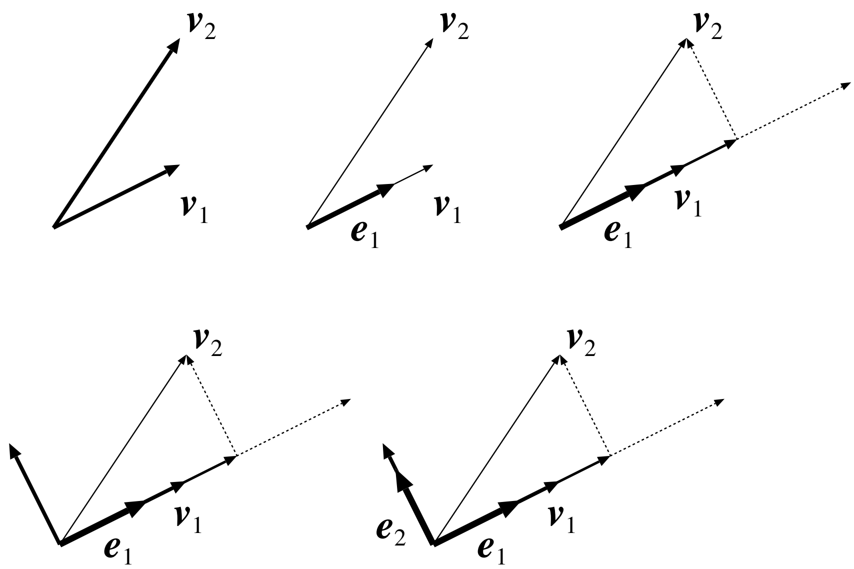
問題： 互いが直交しており，長さが 1 のベクトル 2 本を求める．

(a) $\boldsymbol{v}_1 \Longrightarrow \boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{||\boldsymbol{v}_1||}$

(b) $\boldsymbol{v}_2$ の $\boldsymbol{e}_1$ 成分を求める． $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$

(c) したがって $\boldsymbol{v}_2$ の $\boldsymbol{e}_1$ に直交する成分のベクトルは $\boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$．このノルムを 1 に規格化したのが求める $\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1}{||\boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1||}$.

(d) 3 次元以上の場合も，これと同じことを続けていく．
$\boldsymbol{v}_3$ の $\boldsymbol{e}_1$ 成分を求める． $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$
$\boldsymbol{v}_3$ の $\boldsymbol{e}_2$ 成分を求める． $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$
したがって $\boldsymbol{v}_3$ の $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に直交する成分のベクトルは $\boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$．このベクトルのノルムを 1 に規格化したのが求める $\boldsymbol{e}_3$.



【演習問題】

$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ で与えられる $\mathcal{R}^3$ の基底から正規直交基底を作れ．ここで $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 \end{bmatrix}$ の内積は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ と定義されているとする．

(a) $\boldsymbol{u}_1 \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \dfrac{\boldsymbol{u}_1}{||\boldsymbol{u}_1||}$, $||\boldsymbol{v}_1|| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, $\quad \boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\boldsymbol{u}_2$ の $\boldsymbol{v}_1$ 成分を求める．$< \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{v}_1 = (-1+1)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$

(c) $\boldsymbol{u}_2$ の $\boldsymbol{v}_1$ に直交す成分のベクトルは $\boldsymbol{u}_2 - < \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_2$．このノルムを 1 に規格化したのが求める $\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{\boldsymbol{u}_2}{||\boldsymbol{u}_2||} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\boldsymbol{u}_3$ の $\boldsymbol{v}_1$ 成分のベクトルを求める．$< \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1+2+1}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \boldsymbol{v}_1$

$\boldsymbol{u}_3$ の $\boldsymbol{v}_2$ 成分を求める．$< \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 > \boldsymbol{v}_2 = \dfrac{-1+2}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{v}_2$

$\boldsymbol{u}_3$ の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に直交する成分のベクトルは

$$\boldsymbol{u}_3 - < \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{v}_1 - < \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 > \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6-8+3 \\ 12-8-3 \\ 6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

このベクトルのノルムを 1 に規格化したのが求める $\boldsymbol{v}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{1+1+4}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

QR 分解

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= b_{11} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 &= b_{12} \boldsymbol{v}_1 + b_{22} \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 &= b_{13} \boldsymbol{v}_1 + b_{23} \boldsymbol{v}_2 + b_{33} \boldsymbol{v}_3 \end{aligned}$$

整理すると

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$$

と書ける．$U = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$ と書くと，

$$U = VB$$

V は与えられたベクトル.

例題 4.10

教科書の補足.

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

によって生成される $\mathcal{R}^4$ の部分空間 V の正規直交基底を 1 つ与えよ.

Q: これらの 3 つのベクトルは線形独立なのか.

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{||\boldsymbol{u}||}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

これはよい.

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1}{||\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1||}$$

$$\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 0\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

したがってこれは $\boldsymbol{v}$ の長さを 1 にするだけでいい.

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{||\boldsymbol{u}||}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{w} - (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2}{||\boldsymbol{w} - (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2||}$$

$$\boldsymbol{w} - (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{w} - \frac{4}{2}\boldsymbol{u}_1 - 0\boldsymbol{u}2 = \boldsymbol{w} - 2\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$