線形変換，1 次変換

今回
教科書： pp.106-107. pp.114-115. pp.118-121 を解説.

0. シュミットの直交化 （次回： 直交行列・直交変換）
1. 線形写像： たちの良い行列（正則行列）とたちの悪い行列（0 行列など）
2. カーネル（核），イメージ（像）とは

次回： 直交行列，固有値・固有ベクトル

1 次変換 （線形変換）

例 1

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{1}$$
$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{2}$$

これは 2 次元ベクトルから，2 次元ベクトルへの変換．こういうものを一次変換という．「こういうもの」とは，一般には，n 次元ベクトルから， m 次元ベクトルへの変換．これが行列とベクトルの掛け算で書けていれば，一次変換.

通常： 入力 $\boldsymbol{x}$ と出力 $\boldsymbol{y}$ は 1:1 に対応している （全単写）.

$$\boldsymbol{x} \longleftrightarrow \boldsymbol{y}$$

例 2. たちの悪い例：手がかりがりが足りない場合
次の連立方程式を考える：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

これはベクトルと行列を使って書ける．未知数 3 つに対し，式が 2 つしかない.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$
$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{4}$$

問： 「行列 A という変換で $\boldsymbol{y}$ に移ってきました．元の $\boldsymbol{x}$ はどこだったでしょうか」

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ 「$x_1 + x_3 = -1$ をみたす直線上のどこかにいたはずだ」ということ以外は分からない.

「ぺちゃんことにつぶれる」 $\Longrightarrow$ 「複数の $\boldsymbol{x}$ が同じ $\boldsymbol{y}$ に移る」

（極端な）例

例 3： 3 次元から 2 次元

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

例 4： 3 次元から 1 次元

$$\begin{pmatrix} y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

用語： 核 (kernel)

核： $A\boldsymbol{x} = 0$ に移ってくるような $\boldsymbol{x}$ の集合．Ker A と表す．
例 3： Ker A は 1 次元． $\boldsymbol{x} = (0, 0, x_3)$ のとき $\boldsymbol{y} = (0\ 0)^{\mathrm{T}}$
例 4： Ker A は 2 次元． $\boldsymbol{x} = (x_1, 0, x_3)$ のとき $\boldsymbol{y} = (0\ 0\ 0)^{\mathrm{T}}$

ぺちゃんこにつぶれない場合は Ker A は 0 次元（原点 $\mathbf{0}$ ただ 1 点のみ）.

問：どうして $\mathbf{0}$ に移ってくる領域だけを考えるのか．同じ $\boldsymbol{y}$ に移ってくる $\boldsymbol{x}$ は考えなくていいのか.

説明：$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ だとする．これと同じ $\boldsymbol{y}$ に移ってくるような $\boldsymbol{x}'$ の集合を考える．

$$\begin{cases} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{y} \\ A\boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{y} \end{cases} \tag{7}$$

$\Longrightarrow A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \mathbf{0}$
$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$ とおく． $\Longrightarrow A\boldsymbol{z} = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{z}$ が Ker A に入っている．

逆に，$\boldsymbol{z}$ が Ker A に入っている場合.
$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}$ を作る． $A\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = A\boldsymbol{x}$
これが「Ker A に平行な方向の成分が定まらない」理由.

手がかりがりが多すぎる場合（縦長行列・像）

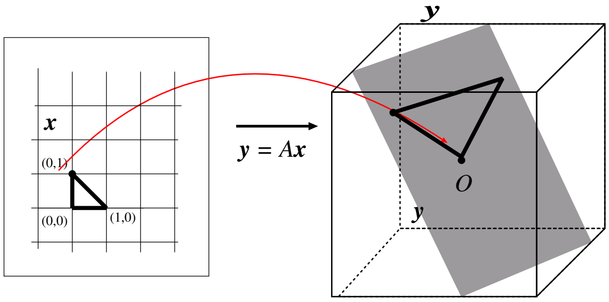
$$\begin{cases} x_1 - x_2 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= -5 \\ 2x_1 - x_2 &= 5 \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}' \tag{10}$$

この式を満たす $\boldsymbol{x}$ は存在しない．$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ に移ってくる $\boldsymbol{x}$ は存在しない」

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ の場合：



$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

用語： 像 (image)

A の像：いろいろな $\boldsymbol{x}$ に対する $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の集合．Im A と表す．元の空間全体を A で移した領域.

次元定理：

$m \times n$ 行列 A について，

$$\dim \mathrm{Ker}\ A + \dim \mathrm{Im}\ A = n$$

ここで dim X は X の次元.

意味： A は n 次元空間から m 次元空間への写像であり,「もとの n 次元空間から，Ker A の次元分がぺちゃんこにつぶれて，残ったのが Im A の次元分.」

例 $(2 \times 3$ 行列)：

$$\dim \mathrm{Ker}\ A + \dim \mathrm{Im}\ A = n \rightarrow 1 + 2 = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

意味： A は 3 次元空間から 2 次元空間への写像であり,「もとの 3 次元空間から，Ker A の次元分（1 次元）がぺちゃんこにつぶれて，残ったのが Im A の次元分（2 次元）.」

ランク（階数）： 像 Im A の次元 dim Im A：dim Im A = rank $A = n$