直交変換とその性質

今回： 直交行列，直交変換
教科書： pp.118-121 を解説.

前々回： 正規直交基底，シュミットの直交化
前回： 線形変換，カーネル（核），イメージ（像）

次回： コンピュータで理解する線形代数

直交行列とは：

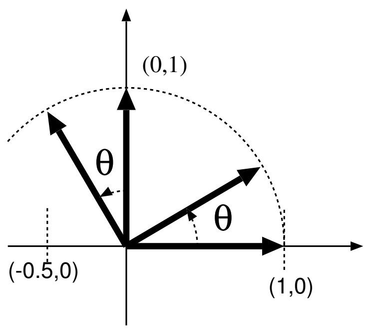
『線分の長さや，線分どうしのなす角は変化しない変換.』

- 線分の長さが変化しない：$||A\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}||$
- 線分どうしのなす角が変化しない：$\cos\theta = \dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}||} = \dfrac{(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})}{||A\boldsymbol{x}||||A\boldsymbol{y}||} \Longrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$

例：x-y 平面で，角度 θ だけ回転する写像
変換行列が $A = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ であるような，変換．これは

$$A = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$$

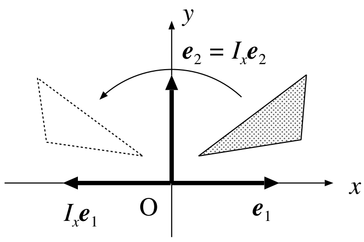
となっており，原点 O を中心とする角 θ の回転移動を表す行列となっており，これは直交行列の例になっている.



回転と鏡映

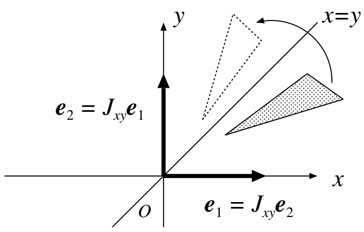
鏡映によって，図形の形は変わらないが，向きが反転，裏返しになる．
例 1. x-y 平面で，y 軸に関して対称に折り返す写像 I_x

$$I_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



例 2.
x-y 平面で，x 軸を y 軸に，y 軸を x 軸にする写像.

$$J_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



一般（広義）の回転： 回転と鏡映をいくつか合成したもの

一般の回転は，任意の図形をそれと合同な図形に写像する．
$\Longrightarrow$ 線分の長さや，線分どうしのなす角はこの写像によって変化しない.

- 線分の長さが変化しない：$||A\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}||$
- 線分どうしのなす角が変化しない：$\cos\theta = \dfrac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}||||\boldsymbol{y}||} = \dfrac{(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})}{||A\boldsymbol{x}||||A\boldsymbol{y}||} \Longrightarrow (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$
  $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$ が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ で成り立てば，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ を代入すると，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = ||\boldsymbol{x}||^2 = ||A\boldsymbol{x}||^2$ で $||A\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}||$ が言える.

定理： 直交行列

正方行列 U が直交行列であることは，次のように表すことができて，それらはどれも同値である．

1. 行列 U は一般の回転を表し，図形を合同な図形に写像し，線分の長さもなす角度も変えない． $\Longrightarrow$ 行列式 $|U|=1$ （この変換によって対応する領域の面積/体積が変化しない）
2. 任意の列ベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対し $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(U\boldsymbol{x},U\boldsymbol{y})$ （内積の保存）
3. 任意の列ベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対し $||\boldsymbol{x}||=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}=||U\boldsymbol{x}||$ （大きさの保存）
4. 行列 U の各列の要素を成分とする n 個の列ベクトルはすべて長さ 1 で，たがいに直交する．すなわち $(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j)=\delta_{ij}$
5. $U^{\mathrm{T}}U=UU^{\mathrm{T}}=E$
$$U^{\mathrm{T}}U=\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ \boldsymbol{u}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n\end{bmatrix}$$
例： $U=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2\end{pmatrix}$ の場合，内積が $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)=0$ となり，大きさ $||\boldsymbol{u}_1||=||\boldsymbol{u}_2||=1$.
6. $U^{\mathrm{T}}=U^{-1}\Longrightarrow$ 逆行列を計算する手間が省ける

この直交行列による線形変換を，直交変換という

直交という名前の由来：行列を列の並びとみなしたとき，それがすべて直交しているから．

例：

原点 O を中心とする角 $\theta=30^\circ$ の回転移動を表す行列 $U=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}$ は直交行列になっており，上の性質をすべて満たしている．

U^{T} は原点 O を中心とする角 $\theta=-30^\circ$ の回転移動を表す行列

$$U^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & \sin 30^\circ\\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos -30^\circ & -\sin -30^\circ\\ \sin -30^\circ & \cos -30^\circ\end{bmatrix}$$

となっており，$UU^{\mathrm{T}}=E$ となるのも直観的に理解できる．

固有値・固有ベクトル

それぞれの正方行列 A には，ある特別なベクトル（固有ベクトル）が存在する．
通常 $n\times n$ 行列には n 個の固有ベクトルが存在する．

行列 A が与えられると，固有ベクトル $\boldsymbol{x}_A$ が計算できる．

$$A\boldsymbol{x}_A=\lambda_A\boldsymbol{x}_A$$

λ_A のことを行列 A の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_A$ に対する固有値といい，一般には複素数の値をとる．
うれしいこと： 左辺は（行列）$\times$ ベクトル．右辺は定数 $\times$ ベクトル． 計算の手間が全然違う．