

応用数学 2 : チェックリスト

各概念の考え方, 概念どうしの関係を理解する.

1. フーリエ級数, フーリエ変換, 線形システム, どれも話は 線形代数.

(a) 基底ベクトルの線形結合で, 信号 (波形, 関数, 情報, 音波, 音声, 画像) を表現:

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$$

(b) 重ね合わせ, 線形性: 分解して処理できる

$$f(\mathbf{v}) = x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n f(\mathbf{e}_n)$$

(c) 基底ベクトルの選び方は無数にある. どう選ぶか. 正規直交基底とは限らない.

$$\mathbf{v} = y_1 \mathbf{e}'_1 + y_2 \mathbf{e}'_2 + \cdots + y_n \mathbf{e}'_n$$

(d) 基底ベクトルが互いに 線形独立 なら, 信号の表現が一意に決まる.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow \text{スペースがもたないないので } \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t \text{ と書く (t は転置).}$$

(e) 直交基底 の場合, 基底ベクトル成分 (重み係数) は内積をとれば求まる.

$$(\mathbf{v}, \mathbf{e}_1) = x_1$$

(f) 関数を (無限次元の) ベクトルとみて基底として用いる

$$\text{例: } \mathbf{e}_1 = \sin x, \quad 0 \leq x < 2\pi$$

$$\mathbf{e}_1 = (\sin 0.0, \sin 0.1, \sin 0.2, \cdots, \sin 6.1, \sin 6.2) \rightarrow \text{これでもっと間隔を小さくしていく}$$

(g) 無限次元ベクトルどうしが直交するとは.

$$\mathbf{e}_1 = \sin x, \quad \mathbf{e}_2 = \cos x, \quad 0 \leq x < 2\pi$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$$

(h) 内積の公理 (線形性, 対称性, 正値性)

(i) 固有値・固有ベクトル (固有関数) と線形時不変システム

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

$$\mathcal{S}[e^{i\omega t}] = H(\omega)e^{i\omega t}, \quad -\infty < t < \infty$$

$\mathbf{x}, e^{i\omega t}$ がそれぞれ固有ベクトル, 固有関数になっており, $\lambda, H(\omega)$ が固有値.

2. 複素数を使って信号を表現する .

(a) 複素数と複素平面 : すべて図をイメージして意味を理解する

- i. 複素数 $\alpha = a + bi = |\alpha|e^{i\theta}$
- ii. 複素平面 : 複素数は 2 次元の実ベクトル (a, b) , 実部 a , 虚部 b
- iii. 極形式表示 : 振幅 (絶対値) $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$, 偏角 (位相) $\theta = \arg(\alpha)$, $\tan \theta = \frac{b}{a}$
- iv. 複素数の積 (絶対値どうしをかけて偏角は足す)

$$\alpha\beta = |\alpha||\beta|e^{i(\arg(\alpha)+\arg(\beta))}$$

- v. オイラーの公式 : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (不思議な式 : $e^{i\pi} = -1$)
- vi. 1 の n 乗根 : $\alpha^n = 1$ (単位円を n 分割した図をイメージ)

(b) 複素正弦波 $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$, $-\infty < t < \infty$

- i. 3 次元空間中に漂う 1 本の曲線
- ii. 角周波数の異なる複素正弦波は幅 2π の区間で互いに直交している

3. フーリエ変換 . 1 対 1 の変換 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, $-\infty < t, \omega < \infty$

- (a) 同じ実体について (2 つの) 異なった表現方法がある . 逆変換すればもとに戻る .
- (b) 一つは時間領域での表現 $f(t)$, もう一つは周波数領域での表現 $F(\omega)$.
- (c) フーリエ変換は線形代数で考えると行列とベクトルの積

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$\begin{bmatrix} F(\omega_1) \\ F(\omega_2) \\ \vdots \\ F(\omega_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\omega_1 t_1} & e^{-i\omega_1 t_2} & \dots & e^{-i\omega_1 t_n} \\ e^{-i\omega_2 t_1} & e^{-i\omega_2 t_2} & \dots & e^{-i\omega_2 t_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e^{-i\omega_n t_1} & e^{-i\omega_n t_2} & \dots & e^{-i\omega_n t_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{bmatrix}$$

(この n^2 回の掛け算を $n/2 \log_2 n$ 回で済ませるのが高速フーリエ変換)

- (d) 音声信号のような 1 次元の実数値関数 $f(t)$ は 2 次元平面上に 1 本の曲線として表現されている . そのフーリエ変換 $F(\omega)$ は , 3 次元空間中に漂う 1 本の曲線で表現される . 線から線への変換になっている .
- (e) フーリエ変換の性質 (教科書 7.2 節 , p.126-129) を例題で図的に理解

[1] 線形性

[2] 波形の移動 : 時間的に遅れた (早まった) 信号のフーリエ変換 . パワースペクトル (絶対値の 2 乗) は不変 .

[3] 相似性 : 信号 $f(t)$ が存在する範囲と $F(\omega)$ が存在する範囲を同時に狭くすることはできない .

[4] 周波数シフト . そのままではフーリエ変換する対象が複素数になりわかりにくい . $f(t)$ 無線通信の例で理解する .

[5] 対称性

フーリエ変換とフーリエ逆変換は 2π と符合が違うだけ .

(f) デルタ関数

(g) ホワイトノイズとインパルス (デルタ関数)

どちらもパワースペクトルは無限に ($-\infty < \omega < \infty$) 広がっている。何が違うか。

(h) 例

i. $f_1(t) = \sin wt, -\infty < t < \infty$ のフーリエ変換 $F_1(\omega), -\infty < \omega < \infty$.

ii. $f_2(t) = \sin(wt + \pi/5), -\infty < t < \infty$ のフーリエ変換 $F_2(\omega), -\infty < \omega < \infty$.

どちらも角周波数は同じで、位相だけが異なっている。フーリエ解析のことを周波数解析ともいう。であれば、この二つをフーリエ変換した結果は同じになってほしいと思うかもしれないが、変換は 1:1 なので、異なる二つの信号をフーリエ変換した結果は異なるものになる。ただし、 $F_1(\omega)$ と $F_2(\omega)$ のパワースペクトラムは同じになる。ここがミソ。

4. 線形時不変システム。インパルス応答。たたみこみ。

(a) 線形時不変システム S : 入力と出力で信号の形が不変 ($e^{i\omega t}$ が固有関数) .

$$S[e^{i\omega t}] = H(\omega)e^{i\omega t}$$

(b) 式の意味 : $e^{i\omega t}$ を線形システム S に入力すると $e^{i\omega t}$ の振幅が $|H(\omega)|$ 倍、位相が $-\arg(H(\omega))$ だけ遅れた信号が出てくる。

(c) $H(\omega)$ には 4 種類の名前がついている。

i. 線形時不変システムの 固有値

ii. 周波数特性 : 各周波数 ω の信号を $e^{i\omega t}$ 入力すると $H(\omega)$ 倍される。

iii. インパルス応答のフーリエ変換

iv. 伝達関数

入力のフーリエ変換に $H(\omega)$ をかければ出力のフーリエ変換が得られる。

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega)$$

(d) インパルス応答とたたみこみ。

近眼の人が眼鏡をはずすと映像がぼやける。このぼやけた画像は実際の像と、ぼかし関数のたたみこみで表現できる。

5. その他

(a) 計算テクニック。

i. 奇関数と偶関数。

A. 偶関数 $f(-t) = f(t)$: y 軸対称。例 $\cos(-x) = \cos x$

B. 奇関数 $f(-t) = -f(t)$: 原点对称。例 $\sin(-x) = -\sin x$

ii. 複素数

$$\operatorname{Re}[A_1 e^{i\omega_1 t} \pm A_2 e^{i\omega_2 t}] = \operatorname{Re}[A_1 e^{i\omega_1 t}] \pm \operatorname{Re}[A_2 e^{i\omega_2 t}]$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{d}{dt} A e^{i\omega t}\right] = \frac{d}{dt} \operatorname{Re}[A e^{i\omega t}]$$