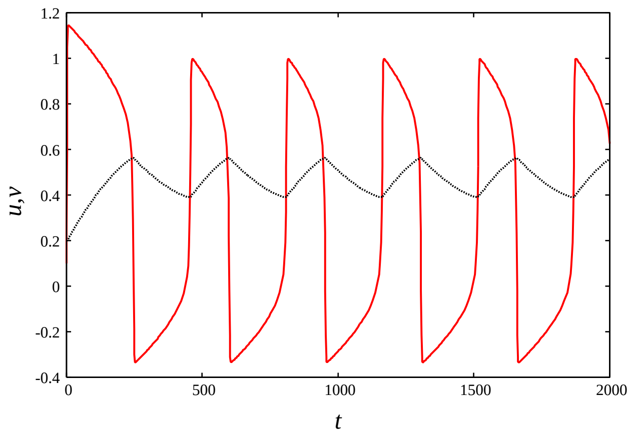
Fitzhugh-Nagumo **モデル**

次の微分方程式を考えよう．$u = u(t)$ は神経細胞の膜電位と思っていい．

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= -u(u-0.01)(u-1.0) - v + 0.4 \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= 0.002(u - 0.5v) \end{cases}$$

$1/0.002 = 500$ は v の時定数で，v は u に比べ非常にゆっくりと変化している場合を考えている．この微分方程式を計算機で数値的に解くと以下に示す結果が得られる．



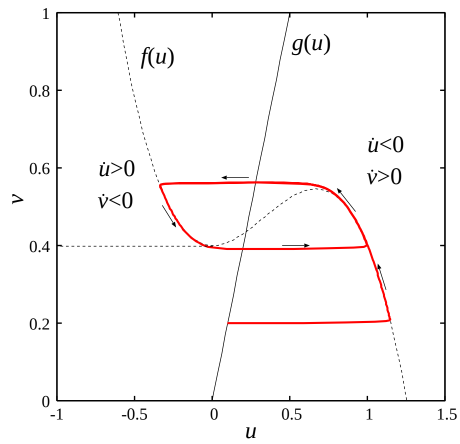


図 1: 左： u, v が時間的に変動している様子．右： u と v の値の関係．

より一般的な以下の微分方程式を考えよう．

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -u(u-\theta)(u-1.0) - v + I \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \varepsilon(u - \gamma v) \tag{2}$$

ここで $0 < \theta < 1$，$0 < \varepsilon \ll 1$．I は外部からの入力．

基本的な考察

$$\dot{u} = -u(u-\theta)(u-1.0) - v + I \tag{3}$$

を考える．v は u に比べ，非常にゆっくりと変化している．つまり u がどう変化するか考えるときには v は定数 v_0 だと思っていい．式 (1) にしたがい，u の値は変化する．u が静止するのは $\dot{u} = 0$ の時である．この時

$$v = -u(u-\theta)(u-1) + I \equiv f(u) \tag{4}$$

となっている（図 1 右）．式 (4) で定義した $f(u)$ を式 (3) に代入して考えると，

$$\dot{u} = f(u) - v \tag{5}$$

であるから，$f(u) > v$ で $\dot{u} > 0$，$f(u) < v$ の場合 $\dot{u} < 0$ となることが分かる．$\dot{u} = 0$，つまり $v = f(u)$ の時は，静止していた v が動き出す．正負どの方向に動くかは

$$v = \frac{1}{\gamma}u \equiv g(u) \tag{6}$$

と置くと $v < g(u) \Longrightarrow \dot{v} > 0$ であり $v > g(u) \Longrightarrow \dot{v} < 0$ となる．具体的な $f(u), g(u)$ の形は図 1 右に示している．u, v それぞれ今後どう動くか各自で考えてほしい．実は，$f(u)$ と $g(u)$ が，$f(u)$ の二つの極値の間で交わるとき（外部からの入力 I が，ある一定の範囲にあるとき），振動が起こる．

課題2（提出締切5/21）

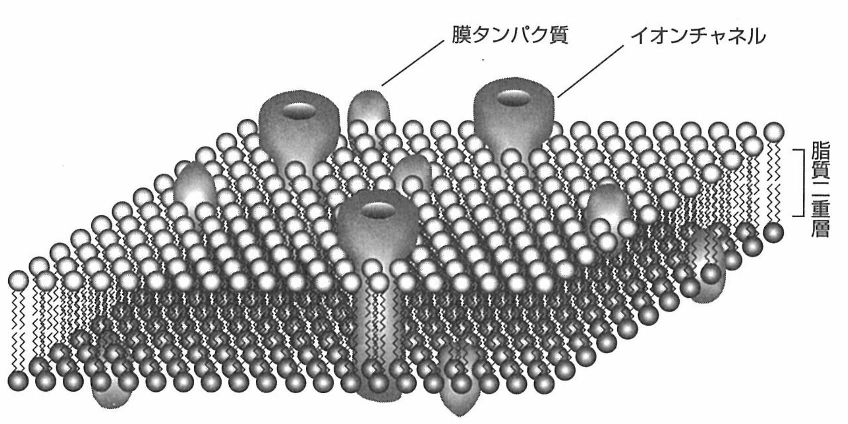
目的

- 細胞が他の細胞から入力を受け取り，興奮してパルスをだす様を表現した微分方程式を考え，その数理モデルの挙動を計算機シミュレーション，手計算により確認する．
- 各パラメータに依存して挙動がどう変化するか観察する．具体的には，外部入力 I（およびパラメータ $\theta, \varepsilon, \gamma$）の値を変え，どのような場合に振動が起こるか，どのような振動が起こるか（周期など），観察してみる．

  ※ 微分方程式をじっくり睨むこと．

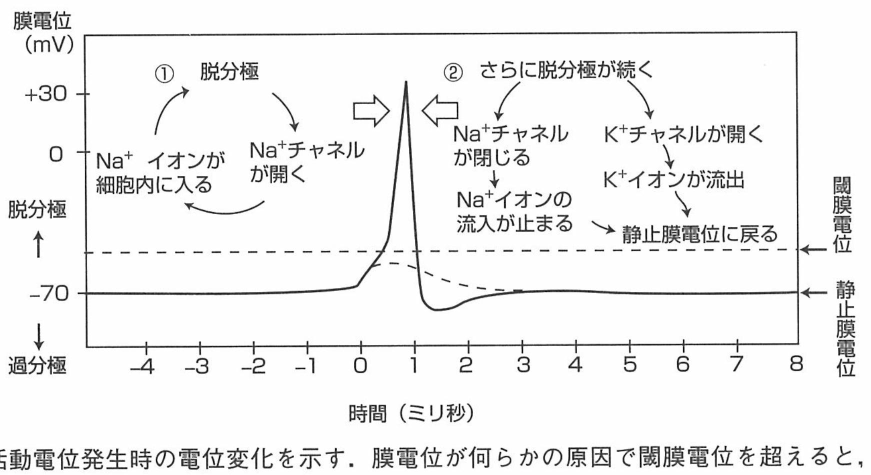
参考：
http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/bis/kadai/kadai2.5bis.html

図2.2 細胞膜の構造



細胞膜は，脂質の二重層からなる．この膜の中に，イオンチャネルの分子やポンプなど，多種多様の膜タンパク質分子が埋め込まれて機能している．

図2.5 活動電位が発生するしくみ



活動電位発生時の電位変化を示す．膜電位が何らかの原因で閾膜電位を超えると，①の過程が一気に進み，膜電位はナトリウムイオンの平衡電位である+30 mV付近まで急激に上昇する．膜電位が0 mVを超えてさらにプラス側に振れることを，オーバーシュートと呼ぶ．その後，②の過程がやや遅れてはじまり，膜電位は静止膜電位に戻る．