学籍番号 : 76 __ __0 __ __ 0

2011 年 5 月 2 日

応用数学 1 名前：________________ 得点：________

小テスト 【崩壊のモデル方程式（定式化）】
解答例

放射性同位体原子は，環境によらず一定の比率で崩壊して安定な原子になる．

1. 時刻 t における放射性同位体の原子数を $N(t)$ と書くと，微小時間 Δt の間に崩壊する原子数は $\lambda N(t)\cdot\Delta t$ と書けるという．この事実から，$N(t)$ のしたがう微分方程式を導け（$\Delta t\to 0$ とする）．

   題意を式で表すと，
   $$N(t)-N(t+\Delta t)=\lambda N(t)\Delta t$$
   となる．しがたって
   $$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=-\lambda N(t) \implies \frac{d}{dt}N(t)=-\lambda N(t)$$

2. 放射性同位体原子の数が半分になるのにかかる時間を半減期という．崩壊定数 λ と半減期 τ の間の関係を導け.

   前問より，$N(t)=C\mathrm{e}^{-\lambda t}$ と書ける．時刻 $t=0$ のとき，$N(0)=N_0=C$ とすると
   $$\frac{N_0}{2}=N_0\mathrm{e}^{-\lambda\tau} \implies \frac{1}{2}=\mathrm{e}^{-\lambda\tau} \implies -\log 2=-\lambda\tau \implies \lambda\tau=\log 2$$
   と書ける．

3. $^{14}\mathrm{C}$ の半減期が 5730 年であるという．崩壊定数 λ を求めよ（単位は /年）．ここで $\log 2=0.693$ とする．

   前問の結果を用い
   $$\lambda=\frac{\log 2}{5730}=\frac{0.693}{5730}\approx 1.21\times 10^{-4}$$

4. サンプルの木炭の $^{14}\mathrm{C}$ 含有量が，生きている木の 80% であるとき，この木炭は約何百年前のものと考えられるか．ここで $\log 5=1.61$ とする．

   時刻 0 で，$N(0)=N_0$ 個，これが時刻 t_1 で，$0.8N_0$ になったとする．式で表すと
   $$N(t_1)=0.8N_0=N_0\mathrm{e}^{-\lambda t_1}$$
   $$\frac{4}{5}=\mathrm{e}^{-\lambda t_1} \implies 2\log 2-\log 5=-\lambda t_1$$
   $$t_1=\frac{\log 5-2\log 2}{\lambda}\approx\frac{1.61-1.39}{1.21\times 10^{-4}}=\frac{0.22}{1.21}\times 10^4=0.182\times 10^4=1820$$
   今から約 1800 年前.