

小テスト 【微分方程式の初等解法】  
解答例

以下では,  $y$  は  $x$  の関数  $y(x)$  である.

1.  $k$  は与えられた定数とする. 微分方程式  $\frac{dy}{dx} = ky$  を満たす関数  $y$  はすべて,  $y = Ce^{kx}$  ( $C$  は定数) と表されることを示せ (ヒント:  $y = z(x)e^{kx}$  を考え,  $y$  がこの微分方程式を満たす場合,  $z = z(x)$  が  $x$  によらない定数になることを示せばよい).

$y$  を  $x$  で微分する.

$$y' = z'e^{kx} + kze^{kx} = kze^{kx}$$

$z, z'$  が満たす微分方程式は

$$z' + kz = kz$$

$z' = 0 \implies$  ここから  $z$  は定数であることがわかる.

2. 微分方程式  $\frac{dy}{dx} = xy$  の一般解, および, 初期条件: 「 $x = 0$  のとき  $y = 1$ 」を満たす解を求めよ.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= xy \\ \frac{1}{y}dy &= xdx \\ \log|y| &= \frac{1}{2}x^2 + C \\ y &= Ce^{\frac{1}{2}x^2}\end{aligned}$$

$x = 0$  のとき  $y = 1$  であるので

$$1 = C \tag{1}$$

したがって

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

確認のため  $x$  で微分してみよう. たしかに  $\frac{dy}{dx} = xy$  となっている.