

小テスト 【変数分離型の微分方程式】

解答例

以下では, u は t の関数 $u(t)$ である. 初期条件 $u(0) = 1$ のもとで, 以下の微分方程式を解け.

$$1. \frac{du}{dt} = u + 1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{u+1} du &= dt \\ \log|u+1| &= t + C \\ u+1 &= Ce^t \\ u &= Ce^t - 1 \end{aligned}$$

$$u(0) = 1 \text{ より } C = 2 \implies u(t) = 2e^t - 1$$

$$2. \frac{du}{dt} = \frac{t}{u}$$

$$\begin{aligned} udu &= tdt \\ \frac{1}{2}u^2 &= \frac{1}{2}t^2 + C \\ u^2 &= t^2 + C \\ u &= \pm\sqrt{t^2 + C} \end{aligned}$$

$$u(0) = 1 \text{ より } 1 = \pm\sqrt{C} \rightarrow C = 1$$

$$u = \sqrt{t^2 + 1}$$

$$3. \frac{du}{dt} = \frac{e^t}{u}$$

$$\begin{aligned} udu &= e^t dt \\ \frac{1}{2}u^2 &= e^t + C \\ u^2 &= 2e^t + C \\ u &= \pm\sqrt{2e^t + C} \end{aligned} \tag{2}$$

$$u(0) = 1 \text{ より } 1 = \pm\sqrt{2 + C} \rightarrow C = -1$$

$$u = \sqrt{2e^t - 1}$$