

小テスト：斉次（せいじ）方程式と非斉次方程式の解の関係について
「非斉次方程式の一般解」= 特解 + 「斉次方程式の一般解」
解答例

1. 連立方程式（非斉次型）

$$\begin{cases} x + y + z = 3 & \text{①} \\ 2x + y + 2z = 2 & \text{②} \end{cases}$$

の一般解を求めよ。 t を任意の値とし、解を $(x, y, z) = (t, _, _)$ の形で表現せよ。

② - ① より、 $x + z = -1$ 。

$2 \times \text{①} - \text{②}$ より、 $y = 4$ 。

したがって、一般解は $(x, y, z) = (t, 4, -1 - t)$ 。

$$\underline{\text{答：}(x, y, z) = (t, 4, -1 - t)}$$

2. 前問の答の t に適当な整数を代入し、連立方程式の特解を2つ、例示せよ。

a. $(x, y, z) = (0, 4, -1)$

b. $(x, y, z) = (1, 4, -2)$

3. 連立方程式（斉次型）左辺は問題1と同じ、右辺の値が0になっている点に注意）

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

の一般解を求めよ。 t を任意の値とし、解を $(x, y, z) = (t, _, _)$ の形で表現せよ。

$x + z = 0$, $y = 0$ より、一般解は一般解は $(x, y, z) = (t, 0, -t)$ と書ける。

$$\underline{\text{答：}(x, y, z) = (t, 0, -t)}$$

4. 「3. で求めた連立方程式の一般解」と、「2. a で求めた1. の連立方程式の特解」の和が、「1. で求めた一般解」になることを計算して確かめよ。特解の選び方は無数にあるが、どの特解を選んでも、この関係はいつでも成立する（どうして？）。

$(t, 0, -t) + (0, 4, -1) = (t, 4, -t - 1)$ となり、確かに成り立つ。

$(t, 0, -t) + (1, 4, -2) = (t + 1, 4, -t - 2)$ 。 t は任意の値なので、 $t + 1 = t'$ と置くと、 $= (t', 4, -t' - 1)$ となり、やはり成り立っている。

z を行列 A の核とする、 $z \in \{x | Ax = 0\}$ 。 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ とすると、1.

は $Ax = b$ である。これを解くためには、とにかく特解 x_0 , $Ax_0 = b$ を一つでいいので発見する(2.)。そうすると3. で求めた斉次方程式 $Ax = 0$ の解 z と特解 x_0 を足したものは $A(x_0 + z) = Ax_0 + Az (= 0) = b$ となる。つまり $Ax = b$ の一般解は $x_0 + z$ と書ける。こう考えると微分方程式の問題との対応が見つかる。