学籍番号：76 __ __0 __ __ 0

2011 年 5 月 30 日
応用数学 1

名前：＿＿＿＿＿＿＿＿ 得点：＿＿＿＿

小テスト：「非斉次方程式の一般解」＝特解 ＋ 「斉次方程式の一 般解」
解答例

各問における y は x の関数 $y(x)$ である．

1. 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$ の一般解を求めよ．

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y} dy &= -2 \int x dx \\ \log|y| &= -x^2 + c \\ y &= C\mathrm{e}^{-x^2},\ C \text{ は任意の定数} \end{aligned}$$

2. 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x$ の特解を一つ求めよ．
（ヒント：右辺が $4x$ であるので，それとよく似た $y = ax + b$ の形の解を探してみる）

$y = ax + b$ を与えられた微分方程式に代入してみると．
（左辺）$= a + 2x(ax + b) = 2ax^2 + 2bx + a$.
これがすべての x で成り立つには，$a = 0, b = 2$．$y = 2$ は，たしかに与えられた式を満たしている．したがって $y = 2$ は与えられた微分方程式の特解になっている．

3. 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x$ の一般解を求めよ．
「非斉次方程式の一般解」＝特解 ＋ 「斉次方程式の一 般解」という知識を使えば，一般解は

$$y = C\mathrm{e}^{-x^2} + 2,\ C \text{ は任意の定数}$$

と書ける．

4. 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = \mathrm{e}^{-x^2}$ の特解を一つ求めよ．
（ヒント：右辺が e^{-x^2} であるので，$y = \mathrm{e}^{-x^2}, x\mathrm{e}^{-x^2}$ の形の解を探してみる）
【省略】（$y = x\mathrm{e}^{-x^2}$ が与えられた式を満たしていることを確認すればよい）

5. 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = \mathrm{e}^{-x^2}$ の一般解を求めよ．

$$y = C\mathrm{e}^{-x^2} + x\mathrm{e}^{-x^2},\ C \text{ は任意の定数}$$

6. （オプション課題）微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + y = \mathrm{e}^{-x}$ の特解を一つ求めよ．
$y = x\mathrm{e}^{-x}$ を代入すると，（左辺）$= \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} =$（右辺）となっている．したがって $y = \mathrm{e}^{-x}$ は与えられた微分方程式の特解になっている．