

小テスト：2階微分方程式と1階の連立微分方程式
解答例各問における x_1, x_2 は t の関数 $x_1(t), x_2(t)$ である．

1. 連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 & \cdots \textcircled{1} \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 3x_2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

を独立変数 t ，従属変数 x_2 の2階微分方程式で記述せよ．
(ヒント：②の両辺を t で微分し， x_1 を消去せよ)

②の両辺を t で微分すると

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = 2\frac{dx_1}{dt} + 3\frac{dx_2}{dt}$$

①より $\frac{dx_1}{dt} = x_2$ を代入し

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = 2x_2 + 3\frac{dx_2}{dt}$$

を得る．整理すると

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} - 3\frac{dx_2}{dt} - 2x_2 = 0$$

を得る．

2. 2階の微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = 0$ を1階の連立微分方程式で記述せよ．
(ヒント：前問)

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \frac{dx}{dt} \end{cases}$$

とおくと，与えられた式は， $\frac{dx_2}{dt} + 4x_2 + 5x_1 = 0$ と書ける．整理すると

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -5x_1 - 4x_2 \end{cases}$$