学籍番号 : 76 __ __0 __ __ 0

2011 年 6 月 13 日

応用数学 1　　　　名前：＿＿＿＿＿＿　　得点：＿＿＿＿

小テスト：2 階微分方程式
解答例

各問における x は t の関数 $x(t)$ である．次の線形微分方程式の一般解を求めよ（任意の定数は C_1, C_2 と記述すればよい）．また，$x > 0$ で，グラフのおおよその形がどうなるか，(a) 減衰・発散，(b) 振動・非振動という 2 つの属性で分類せよ．

1. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 8\dfrac{dx}{dt} + 15x = 0$．初期条件 $x(0) = 1, x'(0) = -1$ を満たす解も求めよ．
   特性方程式
   $$\lambda^2 + 8\lambda + 15 = (\lambda + 3)(\lambda + 5) = 0$$
   より $\lambda = -3, -5$．したがって一般解は
   $$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-3t} + C_2 \mathrm{e}^{-5t}$$
   $x(0) = 1$ より，$C_1+C_2 = 1$．$x'(0) = -1$ より，$-3C_1-5C_2 = -1 = -3C_1-5(1-C_1) = -1$．整理すると，$2C_1 = 4$ より $C_1 = 2, C_2 = -1$．したがって
   $$x(t) = 2\mathrm{e}^{-3t} + -\mathrm{e}^{-5t}$$
   減衰・非振動

2. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 6\dfrac{dx}{dt} + 9x = 0$
   特性方程式
   $$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0$$
   より $\lambda = -3$ で重解．したがって一般解は
   $$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-3t} + C_2 t\mathrm{e}^{-3t}$$
   減衰・非振動

3. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 3\dfrac{dx}{dt} + 4x = 0$
   特性方程式
   $$\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$$
   より $\lambda = \dfrac{3 \pm \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$．したがって一般解は
   $$x(t) =) C_1 \mathrm{e}^{\frac{3}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + C_2 \mathrm{e}^{\frac{3}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$
   発散・振動