学籍番号 : 76 __ __0 __ __ 0

2011 年 6 月 20 日
応用数学 1

名前：＿＿＿＿＿＿＿＿ 得点：＿＿＿＿

小テスト：連立微分方程式
解答例

次の連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y & \cdots ① \\ \dfrac{dy}{dt} = x & \cdots ② \end{cases}$$

を考えよう．ここで x, y は t の関数 $x(t), y(t)$，初期値 $x(0) = a, y(0) = b$ とする．x, y 平面上におかれた点 $\mathrm{P}(x, y)$ が，時刻 $t = 0$ において点 $\mathrm{A}(a, b)$ を出発し，上式で定まる速度をもって運動する様子をイメージすればよい．

1. この連立方程式を x の 2 階微分方程式で表現せよ.（ヒント：第 1 式を t で微分せよ）

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -x \\ \frac{d^2x}{dt^2} + x &= 0 \end{aligned}$$

2. 前問 1. で求めた 2 階微分方程式の特性方程式を解き，固有値を求めよ．
   特性方程式 $\lambda^2 + 1 = 0$ より，$\lambda = \pm \mathrm{i}$.

3. 一般解 $x(t)$ を求めよ．
   $x(t)$ の一般解は $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$.

4. 前問 3. の結果と連立微分方程式 ①式を利用し，一般解 $y(t)$ を求めよ．
   $y(t) = -x' = -(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) = C_1 \sin t - C_2 \cos t$.

5. 初期値を考慮し，$x(t), y(t)$ を求めよ．
   初期条件 $x(0) = a, y(0) = b$ より，$C_1 = a, C_2 = -b$.

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t - b \sin t \\ y(t) = b \cos t + a \sin t \end{cases}$$

6. $x(t)^2 + y(t)^2$ の値を計算し，この値が時刻 t に依存しないことを確認せよ．

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (a \cos t - b \sin t)^2 + (b \cos t + a \sin t)^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos t \sin t + 2ab \cos t \sin t = a^2 + b^2 \end{aligned}$$