

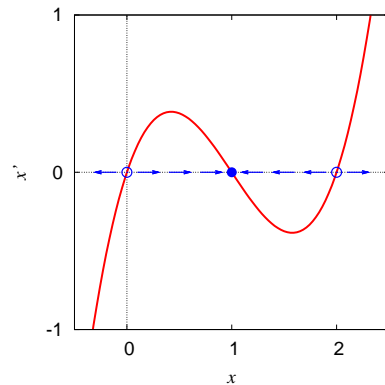
小テスト：解の振舞い，安定性
 解答例

以下では x, y は t の関数 $x(t), y(t)$, $x' = \frac{dx}{dt}, y' = \frac{dy}{dt}$, a は定数とする .

1. 次の方程式の平衡点を求め，平衡点の安定性を論ぜよ .
 (ヒント： 横軸 x , 縦軸 x' のグラフを描いて考えればよい)

$$\begin{aligned} x' &= x^3 - 3x^2 + 2x \\ &= x(x^2 - 3x + 2) \\ &= x(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

平衡点は $x = 0, 1, 2$ の3ヶ所 .
 x' を描くと右図のようになる . $x < 0$ で $x' < 0$, $0 < x < 1$ で $x' > 0$, $1 < x < 2$ で $x' < 0$, $x > 2$ で $x' > 0$, より , $x = 0, 2$ は不安定平衡点 , $x = 1$ は安定平衡点である .



2. 次の方程式の平衡点を求め，解の振舞い，平衡点の安定性を論ぜよ .

$$\begin{cases} x' = ax - y \\ y' = x + ay \end{cases}$$

(ヒント： 行列 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ の固有値を求め，必要に応じ，場合分けして考えればよい) . 平衡点では $x' = 0$ かつ $y' = 0$ となる必要がある . したがって平衡点は原点 $(0, 0)$ のみである . 行列 $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ の固有値を求めよう .

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ |\lambda E - A| &= 0 \\ \begin{pmatrix} \lambda - a & 1 \\ -1 & \lambda - a \end{pmatrix} &= 0 \\ (\lambda - a)^2 + 1 &= \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 1 = 0 \\ \lambda &= a \pm \sqrt{a^2 - (a^2 + 1)} = a \pm i \end{aligned}$$

したがって解の振る舞いは以下の3通りに分けられる .

$a > 0$ のときは，原点は不安定平衡点で，すべての解は渦巻き状に振動しながら ∞ に発散する .

$a = 0$ のときは，すべての解は原点のまわりの円であり，解全体は同心円をなす .

$a < 0$ のときは，原点は安定平衡点になり，すべての解は渦巻き状に振動しながら原点に収束する .