

課題 1: 微分方程式を数値的に解く．時定数とは何か．  
提出締切 6 月 3 日 (金) 正午

複雑な微分方程式でも，コンピュータを使えば簡単に解ける．このことを体験してみよう．今回は，octave と gnuplot，それと L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X にお世話になる．以下，項目 1. ～ 5. に示す微分方程式について，octave を用いて解を求めデータを作り，それを gnuplot でプロットした図を 10 枚作成し，最後に，L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 用に微分方程式の数式を打ち込み，文章を少し書けば今回の課題は完了する<sup>1</sup>．

1. 以下では， $x$  は  $t$  の関数  $x(t)$  とする．さっそく，微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -3x \quad (1)$$

の解を，初期条件  $x(0) = 1$  で求めてみよう．解析的な解が  $y(t) = e^{-3t}$  であることは，すでに学んでいるであろう．ここでは octave を使って，微分方程式の解を数値的に求めてみよう．解析的というのは「紙と鉛筆を使って手計算で解く」という意味で，数値的というのは「与えられた問題の答えを，コンピュータを使って，最終的に数値の形で具体的に求める」という意味である．まずは，エディタを使って，次のファイル ode001.m と gp001 を作成してほしい．octave と gnuplot では，# から始まる行や，各行の # から後ろはコメントであるので，打ち込む必要はない．

```
ode001.m
function dx = f(x,t)
    dx(1) = -3.0*x
end

t=[0:0.1:10];      # 横軸 t の作成 .0 から 10 を 0.1 おきに .t は横ベクトル .
x=lsode("f",1,t); # 1 は初期値 x(0) . こう書けば解いてくれる .
z = [t', x];      # t' は t の転置
save("-ascii","ode001.dat","z" );      # データファイル ode001.dat を生成
plot (t,x,";x(t);");
system("gnuplot gp001 > kadai001.eps"); # みえない所で，図のファイルを作成
pause
```

```
gp001
set terminal postscript "Helvetica" 24 color eps enhanced
set xlabel "Time ({/Italic t})"
set ylabel "{/Italic x(t)}"
set nokey # これを含めると，凡例が表示されない .
set style line 1 lt 1 lw 5 pt 3 ps 1.0 # 線や点の太さの定義
plot "ode001.dat" using 1:2 with lines linestyle 1
```

Linux の端末から

<sup>1</sup><http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/latex/latexreport.html> を参照．レポートを L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X で書くことを強制するわけではない．

```
sab1234:pc70 $ octave ode001.m
```

と実行してみよう (sab1234 は各自の MID) . 成功すれば画面にグラフが表示される . コマンドを実行したウィンドウをマウスで選択し , リターンキーを押せば , 図は消え , 無事に終了できる . レポート作成時に必要となる kadai001.eps というファイルが作成されているはずなので , 適切に生成されているか確認しておこう ( 図 1 左 ) .

```
$ evince kadai001.eps
```

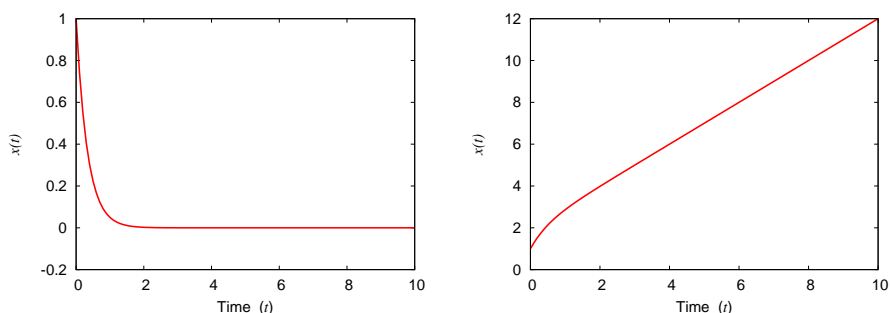


図 1: 左 :  $\frac{dx}{dt} = -3x, x(0) = 1$  . 右 :  $\frac{dx}{dt} = -2x + 2t + 5, x(0) = 1$

2. 先のプログラム中 , `lsode` や `z = [t', x];` を含む行が呪文に見えるかもしれないが , たったこれだけで , いろいろな微分方程式が解けるので , このくらいは我慢して前に進もう . 次は , もう少し複雑な微分方程式

$$\frac{dx}{dt} + 2x = 2t + 5 \quad (2)$$

を解いてみる . `ode001.m` の 2 行目を `dx(1) = -2*x + 2*t + 5` と書き換えるだけでよい . あとは , ファイル `ode001.m` 中に記述されているデータファイル名 ,

```
save("-ascii","ode001.dat","z" );  
system("gnuplot gp001 > kadai001.eps");
```

および `gp001` の最終行

```
plot "ode001.dat" using 1:2 with lines linestyle 1
```

に記述されているファイル名を適切な名前に変更して , 先と同様に走らすとよい (`ode001.m` を `ode002.m` , `gp001` を `gp002` にコピーして改変して使うのがおそらく簡単 . もちろん , 出力ファイル名も `kadai002.eps` としておかないと前に作ったファイルに上書きされてしまい , レポート作成のときに困る ) . 横軸の表示範囲の開始点は 0 である必要はない . たとえば , `[-10,10]` の範囲を表示したい場合 , 5 行目を `t=[-10:0.1:10];` とすればよい . この場合 , `x=lsode("f",1,t);` は , 初期値として  $x(-10) = 1$  を与えたことになる .

3. 教科書 p.66 第 2 章演習問題 [3] には 6 通りの微分方程式が掲載されている。octave を使いこれらの解を数値的に求めてみよう（解析的な解は，p.214 を参照）。初期値は自由に設定し，表示結果をみて，横軸  $t$  の表示範囲を適切な値に設定せよ（式（7）の解析解は  $x = \frac{1}{C-t}e^{-t}$  であり， $t = C$  のとき，不都合がおこるので要注意）。octave では  $\sin t$  は  $\sin(t)$ ， $e^t$  は  $\exp(t)$ ， $t^3$  は  $t*t*t$ ，と打ち込めばよい。

$$x' + 2tx = 4t \quad (3)$$

$$x' = e^{-t^2} - 2tx \quad (4)$$

$$x' + x = e^{-t} \quad (5)$$

$$x' - (\sin t)x = \sin(2t) \quad (6)$$

$$x' + x = x^2 e^t \quad (7)$$

$$x' - tx = -x^3 e^{-t^2} \quad (8)$$

4. 次に，微分方程式

$$\tau \frac{dx}{dt} = -x + 1 \quad (9)$$

を考えよう。ここで  $\tau$ （タウ）は時定数とよばれる量であり， $t = 0$  での初期値は  $x(0) = 0$  とする。単純な式ではあるが，この式の意味を，計算機実験を通して考えてみよう。「時定数」という言葉は「時定数が大きい」「時定数が小さい」という使い方をする。この微分方程式は，時間  $t = 0$  で，あるシステムに 1 という信号が入力されたときの，システムの応答  $x = x(t)$  を記述する式とも解釈できる。 $x$  の値は時間と共に変化する。もし  $x$  が収束する場合， $t \rightarrow \infty$  でどういう値に収束するかは， $x' = 0$  を解けば分かる。この例では  $-x + 1 = 0$  であるので，もし収束するなら， $x = 1$  に収束することが分かる。問題は「定数  $\tau$  の値」と「 $x$  が値 1 に近づいていく時間的な速さ」の関係である。 $\tau = 0.1, 1, 10$  の 3 通りで，微分方程式を数値的に解いた結果を，1 枚の図に重ねてプロットし， $\tau$  の大きさと， $x$  の値が 1 に近づく速さの関係を確認せよ（この式は変数分離型であり， $x(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$  と解析的に解けるため，予想は簡単にできると思う）。3 本の解を同時にプロットするには，次のように書けばよい。

```
ode009.m
function dx = f(x,t)
    dx(1) = (-x(1) + 1)/0.1
    dx(2) = (-x(2) + 1)/1.0
    dx(3) = (-x(3) + 1)/10.0
end
t=[0:0.1:10];          # t は横ベクトル
x=lsode("f",[0,0,0],t); # [0,0,0] は初期値
z = [t', x];           # t' は t の転置
save("-ascii","ode009.dat","z");
plot(t,x(:,1),"r;tau=0.1;");
hold on
plot(t,x(:,2),"g;tau=1.0;");
hold on
plot(t,x(:,3),"b;tau=10.0;");
system("gnuplot gp009 > kadai009.eps");
pause
```

gp009

```
set terminal postscript "Helvetica" 24 color eps enhanced
set xlabel "Time ({/Italic t})"
set ylabel "{/Italic x(t)}"
set nokey # これを含めると、凡例が表示されない。
set style line 1 lt 1 lw 5 pt 3 ps 1.0
set style line 2 lt 2 lw 5 pt 3 ps 1.0
set style line 3 lt 3 lw 5 pt 3 ps 1.0
set label "{/Italic tau}=0.1" at first 0.65, first 0.95
set label "{/Italic tau}=1" at first 1.0, first 0.4
set label "{/Italic tau}=10" at first 3, first 0.2
plot "ode009.dat" using 1:2 with lines linestyle 1,\
"ode009.dat" using 1:3 with lines linestyle 2,\
"ode009.dat" using 1:4 with lines linestyle 3
```

5. システムに  $\cos t$  という周期的な信号が入力される、次の微分方程式を考えよう。

$$\tau \frac{dx}{dt} = -x + \cos t \quad (10)$$

初期値は  $x(0) = 0$  とする。前問同様、 $\tau = 0.1, 1, 10$  の3通りを試して図を描き、 $\tau$  の大きさと、 $x$  の値が変化する速さとの関係を確認せよ。前問と合わせて、時定数が「大きい」「小さい」とはどういうことか、これらの図を見て、各自の言葉で説明を試みよ。

6. レポートの最後には、感想、質問などを記述してほしい。理解しにくい点があった場合は、このプリント中の、どこの部分が分かりにくかったか、具体的に、指摘してもらえれば大変助かる（来年度向けに改善するため）。

補足と予告：次回は、連立の微分方程式。これは面白い。教科書 p.193 [例 6] の場合の数値計算例を以下に示しておくので、時間があるときに試しておいてほしい。講義のはじめに手書きで作成した、ベクトル場の表示は gnuplot を使えば簡単に作成できるが、今回は紹介できなかった。時間があれば次回、紹介したい。

ode999.m

```
function dx = f(x,t)
    dx(1) = x(1) -2*x(2)
    dx(2) = x(1) -x(2)
end
t=[0:0.1:10];
x=lsode("f",[6,1],t); # [6,1] は初期値。
plot (t,x(:,1),"r;z1;"); plot (t,x(:,2),"g;z2;");
hold on
xlabel ("t");
ylabel ("z1,z2");
pause
clf
plot (x(:,1),x(:,2) ); # 相空間 (平面) の図 (解軌道)
xlabel ("z1");
ylabel ("z2");
pause
```