応用数学 1
2012 年 5 月 30 日
$\mathcal{A.D.}$

課題 1: 微分方程式を数値的に解く．時定数とは何か.

提出締切 6 月 8 日（金）正午

複雑な微分方程式でも，コンピュータを使えば簡単に解ける．このことを体験してみよう．今回は，octave と gnuplot，それと LaTeX にお世話になる．以下，1. ～ 5. に示す微分方程式について，octave を用いて解を求めデータを作り，それを gnuplot でプロットした図を 10 枚作成し，最後に，LaTeX 用に微分方程式の数式を打ち込み，文章を少し書けば今回の課題は完了する[1].

1. 以下では，x は t の関数 $x(t)$ とする．さっそく，微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -3x \tag{1}$$

の解を，初期条件を $x(0) = 1$ として，求めてみよう．解析的 な解が $y(t) = e^{-3t}$ であることは，すでに学んでいる．ここでは octave を使って，微分方程式の解を 数値的 に求めてみよう．解析的というのは「紙と鉛筆を使って手計算で解く」という意味で，数値的というのは「与えられた問題の答えを，コンピュータを使って，最終的に数値の形で具体的に求める」という意味である．まずは，エディタを使って，次のファイル ode001.m と gp001 を作成してほしい．octave と gnuplot では，# から始まる行や，各行の # から後ろはコメントであるので，打ち込む必要はない．

ode001.m

```
function dx = f(x,t)
     dx(1) = -3.0*x
end

t=[0:0.1:10];       # 横軸 t の作成. 0 から 10 を0.1 おきに. t は横ベクトル.
x=lsode("f",1,t);   # 1 は初期値 x(0).  こう書けば解いてくれる.
z = [t', x];        # t' は t の転置
save("-ascii","ode001.dat","z" );       # データファイル ode001.dat を生成
plot (t,x,";x(t);");
system("gnuplot gp001 > kadai001.eps"); # みえない所で，図のファイルを作成
pause
```

gp001

```
set terminal postscript "Helvetica" 24 color eps enhanced
set xlabel "Time  ({/Italic t})"
set ylabel "{/Italic x(t)}"
set nokey  # これを含めると，凡例が表示されない.
set style line 1 lt 1 lw 5 pt 3 ps 1.0     # 線や点の太さの定義
plot "ode001.dat" using 1:2 with lines linestyle 1
```

Linux の端末から

[1] http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/latex/latexreport.html を参照．レポートを LaTeX で書くことを強制するわけではない.

```
sab1234:pc70 $ octave ode001.m
```

と実行してみよう（sab1234 は各自の MID）．成功すれば画面にグラフが表示される．コマンドを実行したウィンドウをマウスで選択し，リターンキーを押せば，図は消え，無事に終了できる．レポート作成時に必要となる kadai001.eps というファイルが作成されているはずなので，適切に生成されているか確認しておこう（図 1 左）．

```
$ evince kadai001.eps
```

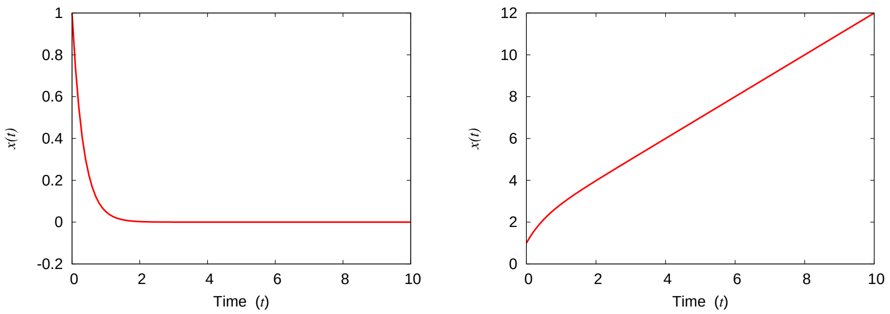

図 1: 左：$\frac{dx}{dt} = -3x, x(0) = 1$． 右：$\frac{dx}{dt} = -2x + 2t + 5, x(0) = 1$

2. 先のプログラム中，lsode や z = [t', x]; を含む行が呪文に見えるかもしれないが，たったこれだけで，いろいろな微分方程式が解けるので，このくらいは我慢して前に進もう．次は，もう少し複雑な微分方程式

$$\frac{dx}{dt} + 2x = 2t + 5 \tag{2}$$

を解いてみる．ode001.m の 2 行目を dx(1) = -2*x + 2*t + 5 と書き換えるだけでよい．あとは，ファイル ode001.m 中に記述されているデータファイル名，

```
save("-ascii","ode001.dat","z" );
system("gnuplot gp001 > kadai001.eps");
```

および gp001 の最終行

```
plot "ode001.dat" using 1:2 with lines linestyle 1
```

に記述されているファイル名を適切な名前に変更して，先と同様に走らすとよい（ode001.m を ode002.m，gp001 を gp002 にコピーして改変して使うのがおそらく簡単．もちろん，出力ファイル名も kadai002.eps としておかないと前に作ったファイルに上書きされてしまい，レポート作成のときに困る）．横軸の表示範囲の開始点は 0 である必要はない．たとえば，[-10,10] の範囲を表示したい場合，5 行目を t=[-10:0.1:10]; とすればよい．この場合，x=lsode("f",1,t); は，初期値として $x(-10) = 1$ を与えたことになる．

3. 教科書 p.66 第 2 章演習問題 [3] には 6 通りの微分方程式が掲載されている．octave を使いこれらの解を数値的に求めてみよ（解析的な解は，p.214 を参照）．初期値は自由に設定し，表示結果をみて，横軸 t の表示範囲を適切な値に設定せよ（式（7）の解析解は $x = \frac{1}{C-t}\mathrm{e}^{-t}$ であり，$t = C$ のとき，不都合がおこるので要注意）．octave では $\sin t$ は `sin(t)`，e^t は `exp(t)`，t^3 は `t*t*t`，と打ち込めばよい．

$$x' + 2tx = 4t \tag{3}$$

$$x' = \mathrm{e}^{-t^2} - 2tx \tag{4}$$

$$x' + x = \mathrm{e}^{-t} \tag{5}$$

$$x' - (\sin t)x = \sin(2t) \tag{6}$$

$$x' + x = x^2\mathrm{e}^t \tag{7}$$

$$x' - tx = -x^3\mathrm{e}^{-t^2} \tag{8}$$

4. 次に，微分方程式

$$\tau\frac{dx}{dt} = -x + 1 \tag{9}$$

を考えよう．ここで τ（タウ）は時定数とよばれる量であり，$t = 0$ での初期値は $x(0) = 0$ とする．単純な式ではあるが，この式の意味を，計算機実験を通して考えてみよう.「時定数」という言葉は「時定数が大きい」「時定数が小さい」という使い方をする．この微分方程式は，時間 $t = 0$ で，あるシステムに 1 という信号が入力されたときの，システムの応答 $x = x(t)$ を記述する式とも解釈できる．x の値は時間と共に変化する．もし x が収束する場合，$t \to \infty$ でどういう値に収束するかは，$x' = 0$ を解けば分かる．この例では $-x + 1 = 0$ であるので，もし収束するなら，$x = 1$ に収束することが分かる．問題は「定数 τ の値」と「x が値 1 に近づいていく時間的な速さ」の関係である．$\tau = 0.1, 1, 10$ の 3 通りで，微分方程式を数値的に解いた結果を，1 枚の図に重ねてプロットし，τ の大きさと，x の値が 1 に近づく速さの関係を確認せよ（この式は変数分離型であり，$x(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ と解析的に解けるため，予想は簡単にできると思う）．3 本の解を同時にプロットするには，次のように書けばよい．

ode009.m

```
function dx = f(x,t)
  dx(1) = (-x(1) + 1 )/0.1
  dx(2) = (-x(2) + 1 )/1.0
  dx(3) = (-x(3) + 1 )/10.0
end
t=[0:0.1:10];                # t は横ベクトル
x=lsode("f",[0,0,0],t);      # [0,0,0] は初期値.
z = [t’, x];                 # t’ は t の転置
save("-ascii","ode009.dat","z" );
plot (t,x(:,1),"r;tau=0.1;");
hold on
plot (t,x(:,2),"g;tau=1.0;");
hold on
plot (t,x(:,3),"b;tau=10.0;");
system("gnuplot gp009 > kadai009.eps");
pause
```

gp009

```
set terminal postscript "Helvetica" 24 color eps enhanced
set xlabel "Time  ({/Italic t})"
set ylabel "{/Italic x(t)}"
set nokey  # これを含めると，凡例が表示されない．
set style line 1 lt 1 lw 5 pt 3 ps 1.0
set style line 2 lt 2 lw 5 pt 3 ps 1.0
set style line 3 lt 3 lw 5 pt 3 ps 1.0
set label "{/Italic tau}=0.1" at first 0.65, first  0.95
set label "{/Italic tau}=1" at first 1.0, first  0.4
set label "{/Italic tau}=10" at first 3, first  0.2
plot "ode009.dat" using 1:2 with lines linestyle 1,\
"ode009.dat" using 1:3 with lines linestyle 2,\
"ode009.dat" using 1:4 with lines linestyle 3
```

5. システムに $\cos t$ という周期的な信号が入力される，次の微分方程式を考えよう．

$$\tau \frac{dx}{dt} = -x + \cos t \tag{10}$$

   初期値は $x(0) = 0$ とする．前問同様，$\tau = 0.1, 1, 10$ の 3 通りを試して図を描き，τ の大きさと，x の値が変化する速さとの関係を確認せよ．前問と合わせて，時定数が「大きい」「小さい」とはどういうことか，これらの図を見て，各自の言葉で説明を試みよ．

6. レポートの最後には，感想，質問などを記述してほしい．理解しにくい点があった場合は，このプリント中の，どこの部分が分かりにくかったか，具体的に，指摘してもらえれば大変助かる．(来年度向けに改善するため）．

補足と予告：次回は，連立の微分方程式．これは面白い．教科書 p.193 [例 6] の場合の数値計算例を以下に示しておくので，時間があるときに試しておいてほしい．講義のはじめに手書きで作成した，ベクトル場の表示は gnuplot を使えば簡単に作成できるが，今回は紹介できなかった．時間があれば次回，紹介したい．

ode999.m

```
function dx = f(x,t)
  dx(1) = x(1) -2*x(2)
  dx(2) = x(1) -x(2)
end
t=[0:0.1:10];
x=lsode("f",[6,1],t);     # [6,1] は初期値.
plot (t,x(:,1),"r;z1;"); plot (t,x(:,2),"g;z2;");
hold on
xlabel ("t");
ylabel ("z1,z2");
pause
clf
plot (x(:,1),x(:,2) );    # 相空間（平面）の図（解軌道）
xlabel ("z1");
ylabel ("z2");
pause
```

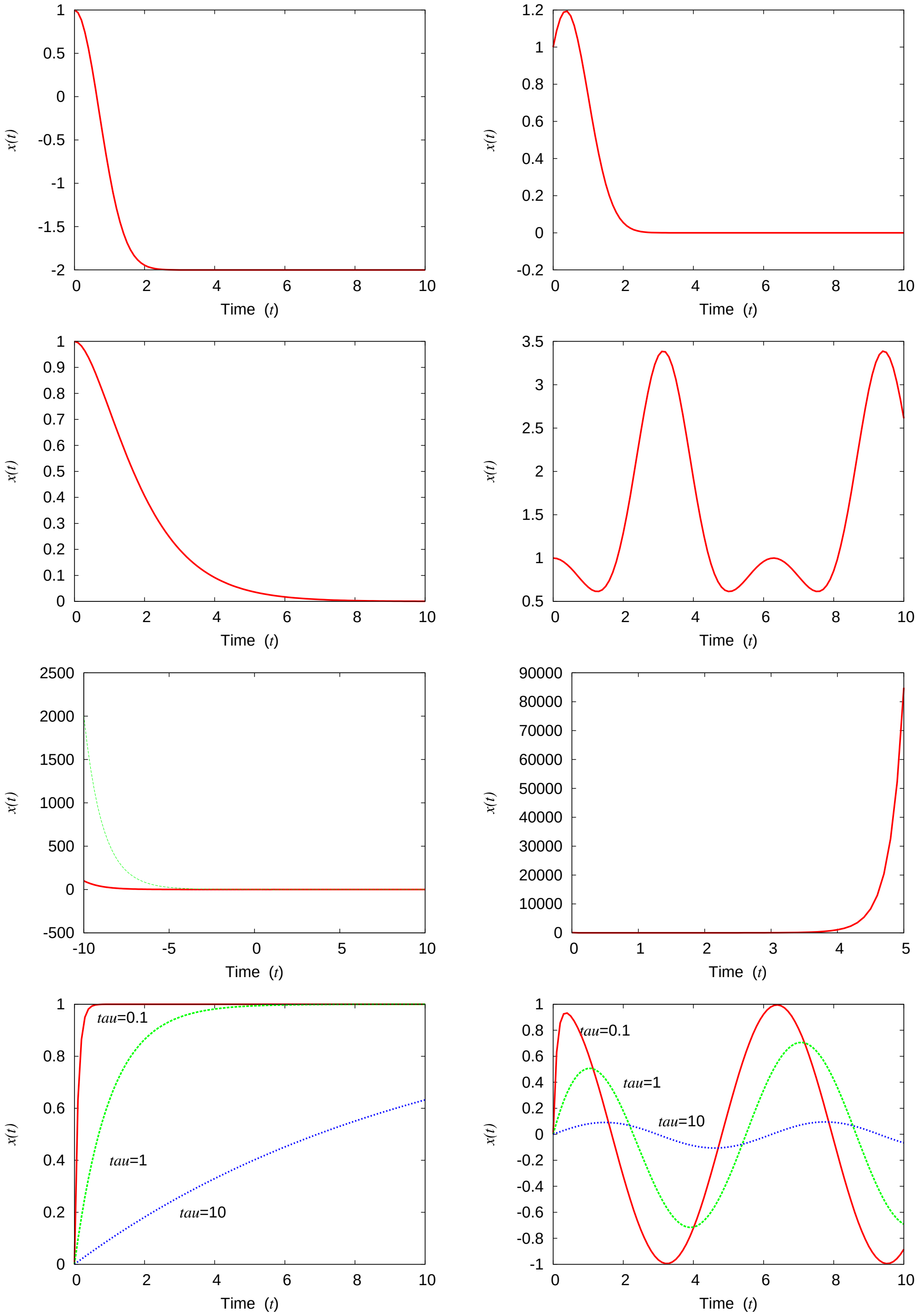

図 2: 実行例