神経回路網特論
2013 年 4 月 16 日

# 課題 1: 連想記憶モデル

提出締切 4 月 23 日（火）

脳は多数の神経細胞の相互作用による並列分散型の情報処理を基本としている．連想記憶の数理モデルのコンピュータシミュレーションを通して，この気分を感じ取ってみよう．

すべての細胞が互いに結合している回路を考えよう．$i$ 番目の素子（細胞）の状態を $x_i \in \{-1, 1\}$，$j$ 番目の素子から $i$ 番目の素子への結合を $w_{ij}$ とし，結合は対称であり（ $w_{ij} = w_{ji}$ ），自己結合はないとする（ $w_{ii} = 0$）．回路の状態（すべての素子の状態）を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と書こう．全素子数を $n$ とすると，各素子は，以下の式にしたがい，同期して自分の状態を変えていく．

$$x_i(t+1) = \mathrm{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j(t)\right) \tag{1}$$

ここで，$x_i(t)$ は時間 $t$ において $i$ 番目の素子がとる値，sgn は

$$\mathrm{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ -1, & u \leqq 0 \end{cases} \tag{2}$$

と，正負により値が決まる関数とする．時間 $t$ における回路の状態を $\boldsymbol{x}(t)$ と書く．$t = 0$ で回路に初期状態 $\boldsymbol{x}(0)$ を与えると，回路の状態は $\boldsymbol{x}(0) \to \boldsymbol{x}(1) \to \boldsymbol{x}(2) \to \boldsymbol{x}(3) \to \cdots \to \boldsymbol{x}(t) \to \cdots$ と時々刻々遷移していく．連想記憶システムの目的は，与えられた入力 $\boldsymbol{x}(0)$ から，あらかじめ記憶させておいた $m$ 個のパターン $\{\ \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^m\ \}$ のうちの一つ，$\boldsymbol{x}^c$ を想い起こすことである．ここで

$$c = \underset{\alpha}{\mathrm{argmin}} ||\boldsymbol{x}^\alpha - \boldsymbol{x}(0)|| \tag{3}$$

である．ふつうのコンピュータでこの問題を解こうとすると，$\boldsymbol{x}(0)$ とそれぞれの記憶パターン $\boldsymbol{x}^\alpha, \alpha = 1, \cdots, m$ との間の距離（または類似度）を求め，距離が最小となる $\alpha$ を求める必要がある．これには距離の計算が $m$ 回必要にある．脳はこのような探索方法を採用しておらず，個々の素子が同時並列に動作することで，目的とする $\boldsymbol{x}^c$ そのものをまっしぐらに求めているようにみえる．こんな記憶の検索を雰囲気を味わえる数理モデルがある．まず問題設定を確認するため，手計算の問題をこなした後，連想記憶モデルをコンピュータ上で実現してみよう．

<u>基本課題</u>（手計算で手順を確認すればよい．1.~3. についてはレポートを提出する必要はない）

1. 素子数 $n=5$ の相互結合型の回路を考えよう．今，すべての結合係数 $w_{ij}, i,j=1\cdots,n$ の値は 0 であるとする．次の 3 つのパターンを Hebb 学習（相関学習）により記憶させたとする．各結合係数 $w_{ij}$ の値を求め，表 1 を埋めなさい．

$$\boldsymbol{x}^1 = (+1,+1,+1,+1,+1) = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1) \tag{4}$$

$$\boldsymbol{x}^2 = (-1,-1,-1,+1,+1) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{x}^3 = (-1,-1,+1,+1,+1) \tag{6}$$

ここで Hebb 学習は

$$w_{ij} := w_{ij} + x_i x_j \tag{7}$$

とする．

表 1: 結合係数 $w_{ij}$

| $i$ \\ $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j^3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | | | | | |
| 2 | | 0 | | | | |
| 3 | | | 0 | | | |
| 4 | | | | 0 | | |
| 5 | | | | | 0 | |
| $x_j^3$ | -1 | -1 | +1 | +1 | +1 | |

2. 状態更新をしても状態が変化しない周期 1 の状態のことを平衡状態とよぶ．1. で作成した回路において，状態 $\boldsymbol{x}^3 = (-1,-1,+1,+1,+1)$ が，回路の平衡状態になっているかどうか調べよ．表 1 右端の空覧を利用し，すべての $i$ について（$i=1,\cdots,5$），

$$x_i^3 = \mathrm{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j^3\right) \tag{8}$$

が成り立っていれば $\boldsymbol{x}^3$ は平衡状態である．

3. 素子数 $n=5$ の回路には，とりうる可能性のある状態は全部で $2^5=32$ 個ある．状態遷移は式 (1) にしたがう確定的なダイナミクスにもとづいておこなわれるため，回路に初期状態 $\boldsymbol{x}(0)$ を与え，$\boldsymbol{x}(0)\to\boldsymbol{x}(1)\to\boldsymbol{x}(2)\to\cdots$ と更新していく場合，$t=32$ までには，2 回以上度出現する状態が少なくとも 1 つは存在する．1. で作成した回路において，32 個，それぞれの状態から状態遷移をはじめた場合，どのような状態遷移をして静止するか，もしくは周期状態になるか，調べてみよ．値 $-1$ を 0 と置き換えれば個々の状態は $0,1,\cdots,31$ の 10 進数で表現できるので，各状態は 0 から 31 の整数で表現できる．32 通りの $\boldsymbol{x}(0)$ について，$\boldsymbol{x}(1)$ をコンピュータで計算しておけば，あとは，手で表に数字を書き込んでいくことができる（表 2）．この回路には，各周期の状態遷移がいくつ存在するか，調べてみよ．

表 2: 状態遷移表．$\boldsymbol{x}(0)$ と同じ状態に戻ってきた後は書き込む必要はない

| $\boldsymbol{x}(0)$ \ $t$ | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ | 31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 00000 | $\boldsymbol{x}^0\to$ | | | | | | | |
| 1 | 00001 | $\boldsymbol{x}^1\to$ | | | | | | | |
| 2 | 00010 | $\boldsymbol{x}^2\to$ | | | | | | | |
| 3 | 00011 | $\boldsymbol{x}^3\to$ | | | | | | | |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | | | | | | | |
| 31 | 11111 | $\boldsymbol{x}^{31}\to$ | | | | | | | |

**課題：コンピュータシミュレーション（必須）**

4. あらかじめ回路に記憶させておくパターン（記憶パターン）を $m$ 個，確率的に生成し，それらが互いにどのくらい似ているか，調べよ．

   素子数 $n=1000$ で実験するために，乱数を使ってあらかじめ $n$ 次元の記憶パターンを $m=80$ 個作っておく．以下，これを $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^m$ と記述する．具体的には，

   (a) $\alpha=1$

   (b) 確率 0.5 で $-1$，確率 0.5 で値 1 をとるように $x_i^\alpha$ の値を決める（すべて素子 $i=1,\cdots,n$ について独立に乱数を生成）．

   (c) $\alpha=\alpha+1$． (a) にもどり $m$ 回繰り返す．

C 言語を利用する場合はデータ構造として 2 次元配列 `int x_memory[α][i]` を用意しておき，これに生成した $x_i^\alpha$ の値を格納しておけばよい．パターン間の類似度を示す指標として以下の内積を使おう．

$$s(\boldsymbol{x}^\alpha, \boldsymbol{x}^\beta) \;=\; \cos\theta = \frac{\boldsymbol{x}^\alpha \cdot \boldsymbol{x}^\beta}{|\boldsymbol{x}^\alpha||\boldsymbol{x}^\beta|} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha x_i^\beta \tag{9}$$

上記のように，$s$ は方向余弦であるので $-1 \leqq s \leqq 1$ で値をとる．$\boldsymbol{x}^\alpha = \boldsymbol{x}^\beta$ なら $s = 1$ である．生成した記憶パターン $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^m$ について，各記憶パターン対の類似度を求め（全部で $\dfrac{m(m-1)}{2}$ 個ある），適当な bin 幅をとり，ヒストグラムを描きなさい（ヒストグラムの作成には `octave` 等を使えばよい）．

5. $n = 1000$ の相互結合型回路に，$\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^m$ のパターンを Hebb 学習させ，結合係数 $w_{ij}$ の値を

$$w_{ij} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{m} x_i^\alpha x_j^\alpha \tag{10}$$

と設定する（ $\dfrac{1}{n}$ の意味は気にしなくてよい）．まず，4. で生成した記憶パターン $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^m$ をもとに，コンピュータ上で，この回路を実現しなさい．

次に，想起過程の実験をしよう．回路に与える初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ としては，記憶パターンそのままというよりは，記憶パターンの一つに近いパターンを使って実験したい．そこで記憶パターンの一つ（ここでは $\alpha = 1$ 番目とする）を取り出し，このうち，はじめの $a$ 個の値（$\overbrace{x_1^1, \cdots, x_a^1}^{a}, x_{a+1}^1, \cdots, x_n^1$）を反転させたものを初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ とする．例えば $x_1^1 = 1$ なら $x_1(0) = -1$ とする，引数として整数 $a, 0 \leqq a \leqq n$ をとり，$\boldsymbol{x}^1$ と部分的に似たパターン $\boldsymbol{x}(0)$ を生成する関数を作っておけばよいだろう．

(a) $a = 100$ とする．

(b) 回路に $\boldsymbol{x}(0)$ を与え，20 回ダイナミックスを繰り返す．横軸に $t$，縦軸に $s(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}(t))$ の値をプロットした図を描きなさい．ここで $\boldsymbol{x}(t)$ は $t$ 回繰り返したあとの回路の状態である．

6. (a) $a = 0$ とする．

(b) 回路に $\boldsymbol{x}(0)$ を与え，20 回ダイナミックスを繰り返す．横軸に $t$，縦軸に $s(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}(t))$ の値をプロットした図を描きなさい．

(c) $a := a + 25$．(b) に戻る．素子数が $n = 1000$ の場合，これを 25 回繰り返す．図は，25 本の折れ線を重ねてプロットすること．

7. 記憶パターン数 を $m = 200$ と変更し，6. と同じ実験をせよ．
8. これまでの結果を踏まえ，連想記憶モデルの性質を考察しなさい．必要であれば，追加で実験をおこなうこと．

   ※ このタイプの連想記憶モデルは記憶容量が $m \approx 0.14n$ であることが知られている．

課題：コンピュータシミュレーション（上記の課題では満足できない場合）

1. 各素子の状態更新を非同期にしてみよ．状態更新の順序は常に一定でもよいし，でたらめな順に更新してもよい（どのような更新の仕方を採用したかレポートには記述すること）．同期更新の場合と，何か異なる性質が観測できるはずである．
2. 「記憶のカタストロフィック崩壊」（人間の脳ではおこらない）
   (a) すべての結合係数の値を 0 にする．
   (b) $\tau = 1$.
   (c) 記憶パターン $\boldsymbol{x}^\tau$ を生成し，Hebb 学習をする．
   $$w_{ij} \ := \ w_{ij} + x_i^\tau x_j^\tau \qquad (11)$$
   (d) $i$ 番目の記憶パターンを回路の初期状態として与え（$i = 1, \cdots, \tau$），回路を 20 回更新したあとの状態（もしくは平衡状態）との方向余弦（上記の類似度 $s(\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x})$）が 0.9 以上であるかどうかを調べよ．これを，ここまでに記憶した $\tau$ 個の各パターンについて調べ，$\tau$ 個の記憶パターンのうち，いくつが回路にきちんと記憶されているか数えよ．これを $b(\tau)$ 個としよう．0.9 という値は勝手に設定した基準値であるので，より厳しい条件にしたければ 0.99 などとすればよい．
   (e) $\tau := \tau + 1$. (c) に戻り，繰り返せ．$n = 1000$ の場合，$300 \sim 500$ 回程度繰り返せばよいだろう．横軸に $\tau$，縦軸に $b(\tau)$ の値をとった折れ線の図を作成し，結果を考察せよ
3. 自分で課題を作り，実験した結果を紹介せよ．

レポートの最後には，感想，質問などを記述してほしい．理解しにくい点があった場合は，このプリント中の，どこの部分が分かりにくかったか具体的に，指摘してもらえれば大変助かる（来年度向けに改善するため）．