応用数学 2
2016 年 11 月 14 日

レポート課題： フーリエ級数

提出締切 11 月 30 日（水）18:00．提出先：A-333

目的： `jpeg` 画像データや，`mp3` 音データには，もとのデータが 約 1/10 に圧縮されて保存されている．ここにフーリエ級数の考え方が使われている．このフーリエ級数とはなにか．コンピュータを使い，その仕組みを適切にイメージできるようになろう．

基礎知識（教科書第 5 章，pp.63-70.）

基本周期 2π の関数 $f(t)$ のフーリエ級数展開は

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos kt + b_k \sin kt\} \tag{1}$$

と書ける[1]．ここで係数 a_k, b_k は

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\mathrm{d}t \tag{3}$$

である[2]．しばらくの間，具体例として,「のこぎり波」とよばれる周期 2π の関数

$$f(t) = t, \ -\pi \leqq t \leqq \pi \tag{4}$$

を考えよう．この場合，係数 a_k, b_k は簡単に計算できて

$$a_k = 0, \qquad b_k = (-1)^{k+1}\frac{2}{k} \tag{5}$$

となり[3]，$f(t)$ は

$$f(t) \approx 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \cdots\right) \tag{6}$$

と近似的に表現できる（$\approx$ は $=$ ではなく，ほぼ等しいという意味の記号）．この例では，偶然 cos 項が消えた[4]．この結果は，ギザギザ直線の「のこぎり波」が，なめらかな曲線 $\sin kt$ の足し合わせで近似的に表現できることを意味している（本当か？）．

[1] 基本周期 2π という条件が必要．$f(t)$ の基本周期が T の場合，どう対応すればよいか．$f(t)$ が周期関数でなければ，どう対応すればよいか．a_0 だけ，なぜ $\frac{1}{2}$ 倍されているのか．

[2] これらの式を暗記する必要はない．しかし，式の意味は完全に理解しておく必要がある．

[3] $(-1)^{k+1}$ の値は 1 か -1 しかとらない．k が偶数のときは -1，奇数のときは 1.

[4] 何としらじらしい，こうなるような関数を選んだくせに！

コンピュータ演習

まずは gnuplot を使い，$f(t)$ をフーリエ級数展開した結果を作図してみよう（教科書 p.64 の図 5.1 を再現）．

演習 1：横軸の範囲を $-2\pi \leqq t < 2\pi$ にとり，$f^0(t) = 2\sin t$ のグラフを作図せよ．

人間は $f(t) = 2\sin t$ とか $f(t) = t^2$ などの連続関数を簡単に扱えるが，コンピュータでは，そうはいかない．t を適当な小さい間隔で刻み（離散化），そのとびとびの値での $f(t)$ の値を並べたものを $f(t)$ とみなそう．関数 ≈ 高次元ベクトル：$f(t) \approx \vec{f} = (f_0, f_1, \cdots,)$．作図には，好みのプログラミング言語，ツールを用いてかまわない．一例として，C 言語と gnuplot を利用する場合を以下に示しておく．四則演算，代入と for 文，関数は printf と sin しか使っていないので，このソースコードは問題なく理解できると思う．

f001.c
```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double delta_t = 0.01;       /* 横軸のきざみ幅 */
double start = -2.0*M_PI;    /* 横軸はじまり.  M_PI=3.1415... */
double end   =  2.0*M_PI;    /* 横軸おわり */

int main()
{

  double t;

  for ( t = start; t < end;  t+=delta_t ){
     printf("%.3lf \t %.3lf\n",t, 2.0*sin(t));
  }

}
```

これをコンパイルして走らせると，

```
% gcc f001.c -lm
% ./a.out


-6.283   0.000
-6.273   0.040
-6.263   0.080
-6.253   0.120
-6.243   0.160
....
```

と，2 列でデータが出力される（左側の数字が横軸 t の値，右側が縦軸 $f(t)$ の値）．これを適当なファイル名（以下では d001.dat）で保存しておく．gnuplot は，いちいち立ち上げて使うより，次のようにスクリプトファイルを書いておくと便利だ．

gp001

```
set terminal postscript "Helvetica" 24 color eps enhanced
set xlabel "{/Italic t}"
set ylabel "{/Italic f(t)}"
set nokey  # これを含めると，凡例が表示されない.
set style line 1 lt 1 lw 5 pt 3 ps 1.0    # lw 5 は線の太さ.
plot [-6:6][:] "d001.dat" using 1:2 with lines linestyle 1
```

```
% ./a.out > d001.dat
% gnuplot gp001 > f001.eps
% evince f001.eps
```

これでグラフが表示されたはずである．これは関数 $f(t)$ を，$f(t) \approx 2\sin t$ と式（6）の右辺第一項目だけで近似した結果である．

演習 2：横軸の範囲を $-2\pi \leqq t < 2\pi$ にとり，$f^K(t) = 2\left(\sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kt\right)$ のグラフを作図せよ．ここで K の値は，$K = 3, 5, 10, 100$ など，適当な値を数通り選べばよい．ソースコードは，第 K 項目までを考えるには，f001.c を次のように変更すればよいだろう．

f002.c

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int K = 3; /* 何項目まで足すか */
double delta_t = 0.01;
double start = -2.0*M_PI;   /* 横軸はじまり */
double end   =  2.0*M_PI;   /* 横軸おわり */

int main()
{
  int k;
  double t, f, y;

  for ( t = start; t < end;  t+=delta_t ){

    y=0.0;
    for ( k = 1; k <= K; k++ ){
      y += 2.0*pow(-1.0, (double)(k+1)) * sin( t*(double)k )/(double)k;
    }
    printf("%.3lf \t %.3lf\n",t, y);
  }
}
```

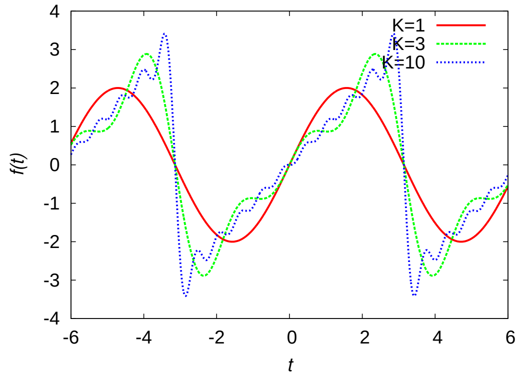
実行した結果を d003.dat　というファイル名で保存しておこう．

gp002

```
set terminal postscript "Helvetica" 24 color eps enhanced
set xlabel "{/Italic t}"
set ylabel "{/Italic f(t)}"
set style line 1 lt 1 lw 5    # 線や点の太さの定義
set style line 2 lt 1 lw 5
set style line 3 lt 1 lw 5
plot [-6:6][:] "d001.dat" using 1:2 title "K=1" with lines linestyle 1,\
"d003.dat" using 1:2 title "K=3"  with lines linestyle 2
```

```
% gcc f002.c -lm
% ./a.out > d003.dat
% gnuplot gp002 > f003.eps
% evince f003.eps
```

$K = 1, 3, 10$ で実行して，それらの結果を重ねたものを図 1 左に示す．



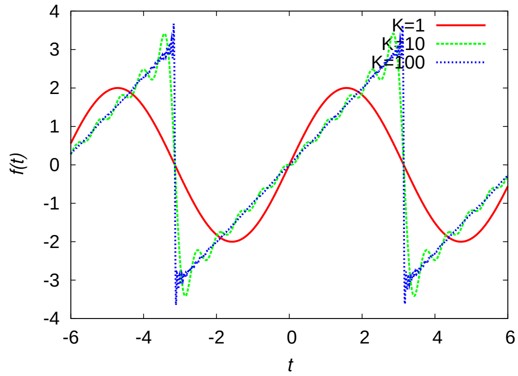


図 1: のこぎり波のフーリエ級数展開．左：$f(t)$ を式（6）の右辺，第 1 項目だけ（$K = 1$），第 3 項目まで（$K = 3$），第 10 項目まで（$K = 10$）を求めて，それぞれ近似して表現した結果．右：$K = 1, 10, 100$ の場合．

レポート課題 1：周期 2π の関数

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi \leqq t < 0 \\ 0, & 0 \leqq t < \pi \end{cases} \qquad (7)$$

のグラフを手で描き，フーリエ級数を求めよ．

※注意点：この課題だけは手書きしたものを提出すること．フーリエ級数を求めるには，まず，フーリエ係数 a_k, b_k を計算し，$f(t)$ を式（6）のように $f(t) \approx \cdots\cdots$ と，適当な項まで表現すればよい．式（7）では，区間 $-\pi \leqq t < \pi$ でしか $f(t)$ の値を定義していないが，「周期 2π の関数」という意味は $f(t) = f(t + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ であるので，$f(t)$ は

$-\infty < t < \infty$ で定義されている．

レポート課題 2：上記の関数 $f(t)$ について，フーリエ級数展開した結果を図で示せ．図 1 のように，K の値を数通り試し，図を 2 枚は作成すること．レポートには，単に図を貼り付けるだけでなく，必ず考察を書き加えること．

レポート課題 3：周期 2π の関数

$$f(t) \;=\; t^2, \quad -\pi \leqq t < \pi \tag{8}$$

について，前問同様，フーリエ級数展開した図を作成し，考察せよ．ここで関数 $f(t)$ を第 K 項目までのフーリエ級数展開した計算すると

$$f(t) \;\approx\; f^K(t) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{K}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kt \tag{9}$$

になる（計算は講義ノート参照）．

レポート課題 4： 課題 1，2 の関数 $f(t)$ について，$f(t)$ とフーリエ級数展開 $f^K(t)$ との近似誤差を求めよ．

$f^K(t)$ は，フーリエ級数展開の項数 K が増えるにしたがい，もとの関数 $f(t)$ に近づいていく，$f(t) \approx f^K(t)$．ここまでの課題で，このことは確認できたと思う．ただし，あくまで $f(t) \approx f^K(t)$ であり，$f(t) = f^K(t)$ とピッタリ一致するわけではない．誤差がある．この近似誤差は，K の値が大きくなるにしたがい，ゼロに近づいていくだろうか．近づいていく場合，どういうスピードでゼロに近づくか，これを調べてみよう．近似の善し悪しは，横軸に K，縦軸に．基本周期分（上記の例題では 2π）の区間で，$f(t)$ と $f^K(t)$ との距離 $d(f, f^K)$ をプロットすると分かりやすい（教科書 5.7 節）．距離は，公理（対称性など）を満たせば，どういう指標を使ってもよい．たとえばユークリッド距離

$$d(f, f^K) \;=\; \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}(f_i - f_i^K)^2} \tag{10}$$

などでよい[5]．ここで関数 $f(t)$ は，コンピュータ上では離散的に切り刻んで扱われているので n 次元ベクトル $f(t) \approx \vec{f} = (f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})^\top$ である．区間 $-\pi \approx -3.14 \leqq t < \pi \approx 3.14$ を $\Delta t = 0.01$ で離散化した場合，$n = 628$ となる．

[5] これを $\Delta t = 0.01$ 倍したものでもよい

レポート課題 5（オプション課題）：データ圧縮

実際の音声の波形をフーリエ級数で表現してみよう．実験に使うバイオリンの「ド」の音の波形データ[6]や，実験用のソースコードは講義のページからダウンロードできるようにしている．

フーリエ級数の利点は次のような問題を考えると分かりやすい．今，別の地点に信号 $f(t)$ を送りたいとする．送り手は，信号 $f(t)$ [7]をそのまま送るのではなく，$f(t)$ をフーリエ級数展開し，その係数 $a_0, a_1, b_1, \cdots, a_K, b_K$ の値だけを相手に送る．受け取った側は，送られてきた $2K+1$ 個の数字だけを用い，$f(t)$ の再構成を試みる（$f^K(t)$ を求める）．課題 1 の例では，$K = 10 \ll n = 628$ であった．628 個の数字を送る代わりに 10 個の数字（フーリエ係数）を送ってもそれなりに情報が伝わる．符号化[8]と復号化[9]に計算コストがかかるが，a_k, b_k の値は $f(t)$ と $\cos kt, \sin kt$ との内積で簡単に計算できる．

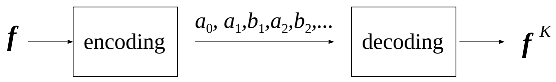


図 2: 628 個の数字を送る代わりに 10 個の数字を送っても，それなりに情報は伝わる．

レポート課題 6：(A4 一枚程度)

フーリエ級数について理解が深まっただろうか．頭の中が???だらけになっているかもしれない．フーリエ級数について，理解できた点，理解できない点・疑問点などを，少なくとも 3 つ程度，具体的に箇条書きし，それぞれの項目について考察せよ．レポートの最後には，感想を記述してほしい．このプリント中に理解しにくい点があった場合は，何ページ何行目の，どこの部分が分かりにくかったか，具体的に，指摘してほしい．

注意事項：

1. レポートの LaTeX を使った簡単な書き方は `http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/latex/latexreport.html` を参照．
2. 評価は，レポートに書かれている内容，「1. 何を調べようとしているのか（目的），2. 得られた結果（図）とその説明，3. 考察」で判断します．特に，考察，感想は，型通りではなく，他人とは違う内容を書こうとしているかを見ます．
3. レポートは，1 年前の自分が読んでも分かるように書けていれば OK（簡単ではない）．
4. 独力で課題が遂行できそうにない場合は，早めに相談すること．

[6] $n = 628$ 次元のベクトル $f(t) \approx \vec{f} = (f_0, f_1, \cdots, f_{627})^\top$

[7] くどいがここでは関数 $f(t)$ は n 次元ベクトル $\vec{f}$

[8] 係数 a_k, b_k の値を求めること（$k = 0, 1, \cdots$）

[9] 係数 a_k, b_k の値から $f(t)$ を再構成すること