15 Apr 2016

YRM71 – Mathematical Neuroscience
Project 1: Associative memory

A short oral presentation is required in addition to turn in a short writeup that describes the problem you investigated, why it is interesting, and results.

Key words

parallel search, distributed storage, content-addressable memory (denoising, pattern completion)

Assignment

1. Refer to Amari & Maginu (1988). Perform computer simulation of associative memory in a neural network of $n = 1000$ neurons, $m = 80$ and 200 memory items. Reproduce the Figure 1 and Figure 2 shown in Amari & Maginu (1988).

   If you want to perform computer simulation of a huge number of neurons (e.g. $n = 10000$), you don't need to use two dimensional array `w[i][j]` since

$$
\begin{aligned}
x_i(t+1) &= \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j(t)\right) \\
&= \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{m} x_i^\alpha x_j^\alpha x_j(t)\right) \\
&= \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{m} x_i^\alpha x_j^\alpha x_j(t)\right).
\end{aligned}
$$

2. $\cdots$

数理脳科学
2016 年 4 月 15 日

課題 1: 連想記憶モデル

中間発表（30 秒/人）：4 月 22 日（金），最終提出締切： 5 月 6 日（金）

目的： 脳は多数の神経細胞の相互作用による並列分散型の情報処理を基本としており，多重分散型の記憶システムをもつ．連想記憶の数理モデルのコンピュータシミュレーションを通して，これらについて直観的な理解を得る．

【問題設定】 n 個の細胞が互いに結合している回路を考える．i 番目の素子（細胞 $i = 1, 2, \cdots, n$）の状態を $x_i \in \{-1, 1\}$，j 番目の素子から i 番目の素子への結合を w_{ij} とし，結合は対称であり（ $w_{ij} = w_{ji}$ ），自己結合はないとする（ $w_{ii} = 0$）．すべての素子の状態を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と書き，これを回路の状態とよぶ．各素子は，以下の式にしたがい，同期して自分の状態を変えていく．

$$x_i(t+1) \quad = \quad \mathrm{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j(t)\right) \tag{1}$$

ここで，$x_i(t)$ は時間 t において i 番目の素子がとる値，sgn は

$$\mathrm{sgn}(u) \quad = \quad \begin{cases} 1, & u > 0 \\ -1, & u \leqq 0 \end{cases} \tag{2}$$

と，正負により値が決まる関数とする．時間 t における回路の状態を $\boldsymbol{x}(t)$ と書く．$t = 0$ で回路に初期状態 $\boldsymbol{x}(0)$ を与えると，回路の状態は $\boldsymbol{x}(0) \to \boldsymbol{x}(1) \to \boldsymbol{x}(2) \to \boldsymbol{x}(3) \to \cdots \to \boldsymbol{x}(t) \to \cdots$ と時々刻々遷移していく．連想記憶システムの目的は，与えられた入力 $\boldsymbol{x}(0)$ から，あらかじめ記憶させておいた m 個のパターン $\{\ \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^m\ \}$ のうちの一つ，$\boldsymbol{x}^c$ を想い起こすことである．ここで

$$c \quad = \quad \underset{\alpha}{\mathrm{argmin}} ||\boldsymbol{x}^\alpha - \boldsymbol{x}(0)|| \tag{3}$$

である．

ふつうのコンピュータでこの問題を解こうとすると，$\boldsymbol{x}(0)$ とそれぞれの記憶パターン $\boldsymbol{x}^\alpha, \alpha = 1, \cdots, m$ との間の距離（または類似度）を求め，距離が最小となる α を求める必要がある．これには距離の計算が m 回必要になる．脳はこのような探索方法を採用しておらず，個々の素子が同時並列に動作することで，目的とする $\boldsymbol{x}^c$ そのものをまっしぐらに求めているようにみえる．こんな記憶の検索を雰囲気を味わえる数理モデルがある．

以下，まず問題設定を確認するため，手計算の問題をこなした後，連想記憶モデルをコンピュータ上で実現してみよう．

<u>基本課題</u>（手計算で手順を確認すればよい．1.～3. についてはレポートを提出する必要はない）

1. 5 個の細胞が互いに結合している回路（素子数 $n = 5$ の相互結合型の回路）を考える．今，すべての結合係数 $w_{ij}, i, j = 1 \cdots, n$ の値は 0 であるとする．次の 3 つのパターン $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^3$ を Hebb 学習（相関学習）

$$w_{ij} \quad := \quad w_{ij} + x_i x_j \tag{4}$$

により記憶させたとする．各結合係数 w_{ij} の値を求め，表 1（右端の列を除く）を埋めなさい．

$$\boldsymbol{x}^1 \quad = \quad (+1, +1, +1, +1, +1) = (x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1) \tag{5}$$
$$\boldsymbol{x}^2 \quad = \quad (-1, -1, -1, +1, +1) \tag{6}$$
$$\boldsymbol{x}^3 \quad = \quad (-1, -1, +1, +1, +1) \tag{7}$$

表 1: 結合係数 w_{ij}

i \ j	1	2	3	4	5	$\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j^3$
1	0					
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
x_j^3	-1	-1	+1	+1	+1	

2. 状態更新をしても状態が変化しない状態のことを平衡状態とよぶ．1. で作成した回路において，状態 $\boldsymbol{x}^3 = (-1, -1, +1, +1, +1)$ が，回路の平衡状態になっているかどうか調べよ．表 1 右端の空覧を利用し，すべての i について（$i = 1, \cdots, 5$），

$$x_i^3 \quad = \quad \mathrm{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j^3\right) \tag{8}$$

が成り立っていれば $\boldsymbol{x}^3$ は平衡状態である．

3. 素子数 $n = 5$ の回路には，とりうる可能性のある状態は全部で $2^5 = 32$ 個ある．状態遷移は式 (1) にしたがう確定的なダイナミクスにもとづいておこなわれるため，回路に初期状態 $\boldsymbol{x}(0)$ を与え，$\boldsymbol{x}(0) \to \boldsymbol{x}(1) \to \boldsymbol{x}(2) \to \cdots$ と状態を更新する場合，$t = 32$ までには，2 回以上度出現する状態が少なくとも 1 つは存在する．1. で作成した回路において，32 個，それぞれの状態から状態遷移をはじめた場合，どのような状態遷移をして静止するか，もしくは周期状態に落ち着くか，書き下して調べてみよ．値 -1 を 0 と置き換えれば個々の状態は $0, 1, \cdots, 31$ の 10 進数で表現できるので，各状態は 0 から 31 の整数で表現できる．32 通りの $\boldsymbol{x}(0)$ について，$\boldsymbol{x}(1)$ をコンピュータで計算しておけば，あとは，手で表に数字を書き込んでいくことができる（表 2）．この回路には，各周期の状態遷移がいくつ存在するか，調べてみよ．

表 2: 状態遷移表．$\boldsymbol{x}(0)$ と同じ状態に戻ってきた後は書き込む必要はない

$\boldsymbol{x}(0)$ \ t		0	1	2	3	4	5	$\cdots$	31
0	00000	$\boldsymbol{x}^0 \to$							
1	00001	$\boldsymbol{x}^1 \to$							
2	00010	$\boldsymbol{x}^2 \to$							
3	00011	$\boldsymbol{x}^3 \to$							
	$\vdots$	$\vdots$							
31	11111	$\boldsymbol{x}^{31} \to$							

<u>課題：コンピュータシミュレーション</u>

4. 回路に記憶させておく m 個のパターン $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^m$ を乱数を使って確率的に生成しよう．以下の実験では特に指示がない限り，素子数 $n = 1000$，記憶パターン数 $m = 80$ とする．まず，パターンどうしの類似度を調べておこう．具体的には，

   (a) $\alpha = 1$

   (b) $\boldsymbol{x}^\alpha$ を作成．確率 0.5 で -1，確率 0.5 で値 1 をとるように x_i^α の値を決める（すべての素子 $i = 1, \cdots, n$ について独立に乱数を生成）．

   (c) $\alpha = \alpha + 1$．(a) にもどり m 回繰り返す．

C 言語を利用する場合はデータ構造として 2 次元配列 `int x_memory[α][i]` を用意しておき，これに生成した x_i^α の値を格納しておけばよい．パターン間の類似度を示す指標としては，以下の内積を使う．

$$s(\boldsymbol{x}^\alpha, \boldsymbol{x}^\beta) \;\; = \;\; \cos\theta = \frac{\boldsymbol{x}^\alpha \cdot \boldsymbol{x}^\beta}{|\boldsymbol{x}^\alpha||\boldsymbol{x}^\beta|} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha x_i^\beta \tag{9}$$

上記のように，s は方向余弦であるので $-1 \leqq s \leqq 1$ である．$\boldsymbol{x}^\alpha = \boldsymbol{x}^\beta$ なら $s = 1$ である．生成した記憶パターン $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^m$ について，各記憶パターン対の類似度を求めよ．全部で $\dfrac{m(m-1)}{2}$ 個あるので，適当な bin 幅をとり，類似度のヒストグラムを描きなさい（ヒストグラムの作成には `octave` 等を使えばよい）．

5. 回路の結合係数 w_{ij} の値を

$$w_{ij} \;\; = \;\; \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{m} x_i^\alpha x_j^\alpha \tag{10}$$

と設定する（ 今は，$\dfrac{1}{n}$ の意味は気にしなくてよい．これは $\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^m$ のパターンを Hebb 学習したことに対応する）．まず，4. で生成した記憶パターン $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^m$ を使い，コンピュータ上で，この回路を実現しなさい．

次に，想起過程の実験をしよう．回路に与える初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ としては，記憶パターンそのままというよりは，記憶パターンの一つに近いパターンを使って実験したい．そこで記憶パターンの一つ（ここでは $\alpha = 1$ 番目とする）を取り出し，このうち，はじめの a 個の値（$\overbrace{x_1^1, \cdots, x_a^1}^{a}, x_{a+1}^1, \cdots, x_n^1$）を反転させたものを初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ とする．例えば $x_1^1 = 1$ なら $x_1(0) = -1$ とする，引数として整数 a，$0 \leqq a \leqq n$ をとり，$\boldsymbol{x}^1$ と部分的に似たパターン $\boldsymbol{x}(0)$ を生成する関数を作っておけばよい．

(a) $a = 100$ とする．

(b) 回路に $\boldsymbol{x}(0)$ を与え，20 回ダイナミックスを繰り返す．横軸に t，縦軸に $s(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}(t))$ の値をプロットした図を描きなさい．ここで $\boldsymbol{x}(t)$ は t 回繰り返したあとの回路の状態である．

6. (a) $a = 0$ とする．

(b) 回路に $\boldsymbol{x}(0)$ を与え，20 回ダイナミックスを繰り返す．横軸に t，縦軸に $s(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}(t))$ の値をプロットした図を描きなさい．

(c) $a := a + 25$．(b) に戻る．素子数が $n = 1000$ の場合，これを 25 回繰り返す．図は，25 本の折れ線を重ねてプロットすること．

7. 記憶パターン数 を $m = 200$ と変更し，6. と同じ実験をせよ．

8. これまでの結果を踏まえ，連想記憶モデルの性質を考察しなさい．必要であれば，追加で実験をおこなうこと．

   ※ このタイプの連想記憶モデルは記憶容量が $m \approx 0.14n$ であることが知られている．

   ****

9. 各素子の状態更新を非同期にしてみよ．状態更新の順序は常に一定でもよいし，でたらめな順に更新してもよい（どのような更新の仕方を採用したかレポートには記述すること）．同期更新の場合と，何か異なる性質が観測できるはずである．

10. 「記憶のカタストロフィック崩壊」（人間の脳ではおこらない）

    (a) すべての結合係数の値を 0 にする．

    (b) $\tau = 1$.

    (c) 記憶パターン $\boldsymbol{x}^\tau$ を生成し，Hebb 学習をする．

$$w_{ij} \quad := \quad w_{ij} + x_i^\tau x_j^\tau \tag{11}$$

    (d) α 番目の記憶パターンを回路の初期状態として与え（$\alpha = 1, \cdots, \tau$），回路を 20 回更新したあとの状態（もしくは平衡状態）との方向余弦（上記の類似度 $s(\boldsymbol{x}^i, \boldsymbol{x})$）が 0.9 以上であるかどうかを調べよ．これを，ここまでに記憶した τ 個の各パターンについて調べ，τ 個の記憶パターンのうち，いくつが回路にきちんと記憶されているか数えよ．これを $b(\tau)$ 個としよう．0.9 という値は勝手に設定した基準値であるので，より厳しい条件にしたければ 0.99 などとすればよい．

    (e) $\tau := \tau + 1$. (c) に戻り，繰り返せ．$n = 1000$ の場合，$300 \sim 500$ 回程度繰り返せばよいだろう．横軸に τ，縦軸に $b(\tau)$ の値をとった折れ線の図を作成し，結果を考察せよ

11. 自分で課題を作り，実験した結果を紹介せよ．

レポートの最後には，感想，質問などを記述してほしい．できるだけ他人と違うコメントになることを意識して書くこと．理解しにくい点があった場合は，このプリント中の，どこの部分が分かりにくかったか具体的に，指摘してもらえれば大変助かる（来年度向けに改善するため）．