

レポート課題 1: 主成分分析

提出締切 11月15日(火) 18:00. 提出先: A-333

目的: 手書き数字データを主成分分析を用い, 主成分をもとめ, 多数の高次元データを平面上にプロットし可視化する. 主成分分析の仕組みを理解する. octave の操作, とくにスライシングに慣れる.

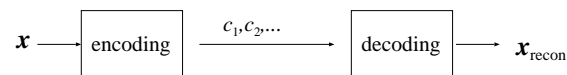


図 1: 256 個の数字を送る代わりに 10 個の数字を送っても, それなりに情報は伝わる.

基礎知識 (教科書第 3 章, pp.39-42)

手書き文字の主成分を求めよう. 主成分分析 (PCA) の利点は次のような問題を考えると分かりやすい. 今, ある場所から遠い別の地点に画像 \mathbf{x} を送りたい. \mathbf{x} は 16×16 の 256 次元ベクトル. 送り手は, 256 個のピクセル値を相手に伝えたい. ここでは少数, たとえば, 10 個の数字しか相手に送れない, という状況を考える. 受け取った側は, 送られてきた 10 個の数字だけを用い, 画像の再構成を試みる. どんな 10 個の数字を送るのがよいだろうか. この話をここまで聞いて, 信号 $f(t)$ をフーリエ級数展開して, そのフーリエ係数を送る話を思い出したら, 話は早い. フーリエ級数の場合は, いろいろな周期の正弦波 (基底) の重み付けの和で $f(t)$ を再構成していた. ここでは 5000 枚の数字画像データ (例題) から計算した基底ベクトル $\{\mathbf{e}_i\}$ を用いる.

$$\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^{10} c_i \mathbf{e}_i$$

フーリエ級数との違いは, あらかじめ基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ が固定されているかいないかである. 係数 c_i は, 画像 \mathbf{x} との内積であるので, 簡単に計算できる.

$$c_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{x}^\top \mathbf{e}_i \quad (1)$$

主成分分析の場合, $\{\mathbf{e}_i\}$ は主成分とよばれ, これはあらかじめ与えられた例題に依存する. n 枚の手書き数字データ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ が与えられている場合, $\{\mathbf{e}_i\}$ は, 実は, データの

共分散行列

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})^\top \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \quad (3)$$

の固有ベクトルである。V は対称行列で、よい性質をもっている。線形代数の知識を使おう。対称行列の固有ベクトル \mathbf{e}_i は互いに直交している。各固有ベクトルのノルムは 1 に正規化できる。

$$V \mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j \quad (4)$$

$$\|\mathbf{e}_j\| = 1, \quad j = 1, 2, \dots, 256 \quad (5)$$

実は、すべての固有値 λ_i が正の値をもつ。そこで $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > 0$ と大きい順に番号をつけておこう。対応する固有ベクトルは $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ である。この \mathbf{e}_1 のことを第 1 主成分、 \mathbf{e}_2 のことを第 2 主成分とよぶ。教科書 図 3.2 は、 $(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x}_i, \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{x}_i)$, $i = 1, 2, \dots, 1000$ をプロットしたものである（数字 1 について 500 点、数字 2 について 500 点）。

$$\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^{10} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x}) \mathbf{e}_i$$

コンピュータ演習

演習 1：教科書 p.42 の図 3.2 を再現せよ。

まずは octave を使うと、簡単に主成分分析ができることを体験しよう。p42.m は代入しか使っていない。% より右はコメント、A' は A の転置である。

```
% octave p42.m
```

で実行できる。もし理解できないところがあれば、octave を立ち上げた後、1 行 1 行実行し、

```
octave: > whos
```

で各変数の形を確認しながら進むとよい。スライシングとよばれる技法に慣れていなければ、この機会に学ぼう。python でプログラムを書くときもこのテクニックは使う。

p42.m

```
clear all
load digit.mat X T % X は訓練用データ (500 文字/数字), T は評価用データ
[d, n, nc] = size(X); % d=256, n=500, nc=10

Z = reshape(X,[d n*nc]); % Z は 256x5000 行列. 全データを並べたもの.

% 分散・共分散行列 V の計算
V = cov(Z'); % これで一挙に V を計算!

% 正定値対称行列 V の固有ベクトル・固有値の計算
[eigvec eigval] = eig(V);
eigval = eig(V);

% ここで固有ベクトルを固有値の大きい順に並べ替える必要あり.
[s, index] = sort(eigval, 'descend');
eigvec = eigvec(:,index); % eigvec は 256x256 行列
e = eigvec(:,[1,2]); % e は 256x2 行列

X1 = X(:, :, 1)'; % 数字 1 の 500 例. X1 は 500x256 行列
C1 = X1*e; % 第 1,2 主成分方向の座標, 500 例. C1 は 500x2 行列
X2 = X(:, :, 2)'; % 数字 2 の 500 例
C2 = X2*e; % 第 1,2 主成分方向の座標, 500 例

figure(1);
clf
axis equal
plot( C1(:,1), C1(:,2), 'b+' ); % 文字種別に色をつけて 2次元上にプロット
hold on
plot( C2(:,1), C2(:,2), 'r*' );
print -depsc2 pca001.eps % png ファイルを出力したければ -dpng pca001.png

figure(2);
clf
imagesc(reshape(eigvec(:,1), [16 16])) % 第 1 主成分を表示
colormap(gray);
axis([0,17, 0,17])
axis equal
print -depsc2 pca002a.eps

figure(3);
clf
x = X(:,23,5); % x は数字「5」の 23 番目の例. 256 次元の縦ベクトル.
s = zeros(256,1);
for c=1:10
    a = x'*eigvec(:,c); % 第 c 主成分の重みを内積で求める.
    s = s + a*eigvec(:,c); % 主成分の重み付け和で画像 x を再構成
end
imagesc(reshape(s, [16 16])) % s は x を再構成した画像
colormap(gray);
axis([0,17, 0,17])
axis equal
print -depsc2 pca003_m10.eps
norm(x-s) % 画像 s と x のユークリッド距離
```

おまけ『手書き数字「4」の500例を表示』: show_images_004.m

```
clear all
load digit.mat X T
[d, n, nc] = size(X); % d=256, n=500, nc=10

figure(1);
clf
for i=1:n
    x = X(:,i,4);
    subplot(20,25,i), hold on
    imagesc( flipdim( reshape(x, [16 16])', 1))
    axis([0,17, 0,17])
    axis equal
    axis off
    colormap(gray);
end
print -dpng images004.png % 少し時間がかかる. あせらず待つ!
```

レポート課題 1:

1. 第 1 主成分 (e_1) から第 10 主成分まで, 具体的にどんな画像になっているか示せ.
2. 第 50, 第 100, 第 200 主成分が, 具体的にどんな画像になっているか示せ.
3. 5000 枚のうち, 画像をランダムに選び (\mathbf{x}), 第 10, 50, 100, 200 主成分まで用い画像を再構成し ($\mathbf{x}_{\text{recon}}$), それをもとの画像 \mathbf{x} と比較してみよ.

$$\mathbf{x}_{\text{recon}} \approx \sum_{i=1}^m (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x}) \mathbf{e}_i$$

$m = 10, 50, 100, 200$. 同じ実験を, 5 枚の異なる画像 \mathbf{x} について試せ.

4. 使用する基底画像の枚数 m に依存し, 再構成した時の誤差

$$r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{recon}}\|$$

が, どのように減っていくか示せ (横軸 m , 縦軸 r の図を描く).

5. 自分で問題を作って, 分析した結果を述べよ. たとえば, 大きい風景写真 (グレースケール化しておく) を構成する 16×16 ピクセルの破片をたくさん集め, その主成分を求めたり, 固有値 $\{\lambda_i\}$ のヒストグラムを描いてみる.

レポートの最後には, 感想を記述してほしい. 理解できた点, 理解できない点・疑問点などを, 具体的に 箇条書きしてほしい. このプリント中に理解しにくい点があった場合は, 何ページ何行目の, どこの部分が分かりにくかったか, 具体的に, 指摘してほしい. p42.m は, もっと簡潔に書けるはずである. それを実現できたら知らせて欲しい.

注意事項:

1. レポートの \LaTeX を使った簡単な書き方は <http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/latex/latexreport.html> を参照.
2. レポートは, 1 年前の自分 (主成分分析を知らない自分を想像せよ!) が読んで, 何を調べようとしているのか (目的), 得られた結果 (図) が分かるように書いていけばよい (コレは簡単ではない).
3. 独力で課題が遂行できそうにない場合は, 早めに相談すること.