

レポート課題： フーリエ級数

提出締切 11 月 30 日 (水) 18:00. 提出先：A-333

目的： jpeg 画像データや, mp3 音データには, もとのデータが約 1/10 に圧縮されて保存されている. ここにフーリエ級数の考え方が使われている. このフーリエ級数とはなにか. コンピュータを使い, その仕組みを適切にイメージできるようになろう.

基礎知識 (教科書第 5 章, pp.63-70.)

基本周期  $2\pi$  の関数  $f(t)$  のフーリエ級数展開は

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos kt + b_k \sin kt\} \quad (1)$$

と書ける<sup>1</sup>. ここで係数  $a_k, b_k$  は

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt \quad (2)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt \quad (3)$$

である<sup>2</sup>. しばらくの間, 具体例として, 「のこぎり波」とよばれる周期  $2\pi$  の関数

$$f(t) = t, \quad -\pi \leq t \leq \pi \quad (4)$$

を考えよう. この場合, 係数  $a_k, b_k$  は簡単に計算できて

$$a_k = 0, \quad b_k = (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \quad (5)$$

となり<sup>3</sup>,  $f(t)$  は

$$f(t) \approx 2 \left( \sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t - \frac{1}{4} \sin 4t + \dots \right) \quad (6)$$

と近似的に表現できる ( $\approx$  は  $=$  ではなく, ほぼ等しいという意味の記号). この例では, 偶然  $\cos$  項が消えた<sup>4</sup>. この結果は, ギザギザ直線の「のこぎり波」が, なめらかな曲線  $\sin kt$  の足し合わせで近似的に表現できることを意味している (本当か?).

<sup>1</sup>基本周期  $2\pi$  という条件が必要.  $f(t)$  の基本周期が  $T$  の場合, どう対応すればよいか.  $f(t)$  が周期関数でなければ, どう対応すればよいか.  $a_0$  だけ, なぜ  $\frac{1}{2}$  倍されているのか.

<sup>2</sup>これらの式を暗記する必要はない. しかし, 式の意味は完全に理解しておく必要がある.

<sup>3</sup> $(-1)^{k+1}$  の値は 1 か  $-1$  しかとらない.  $k$  が偶数のときは  $-1$ , 奇数のときは 1.

<sup>4</sup>何としらじらしい, こうなるような関数を選んだくせに!

## コンピュータ演習

まずは `gnuplot` を使い,  $f(t)$  をフーリエ級数展開した結果を作図してみよう (教科書 p.64 の図 5.1 を再現).

演習 1: 横軸の範囲を  $-2\pi \leq t < 2\pi$  にとり,  $f^0(t) = 2\sin t$  のグラフを作図せよ.

人間は  $f(t) = 2\sin t$  とか  $f(t) = t^2$  などの連続関数を簡単に扱えるが, コンピュータでは, そうはいかない.  $t$  を適当な小さい間隔で刻み (離散化), そのとびとびの値での  $f(t)$  の値を並べたものを  $f(t)$  とみなそう. 関数  $\approx$  高次元ベクトル:  $f(t) \approx \vec{f} = (f_0, f_1, \dots)$ . 作図には, 好みのプログラミング言語, ツールを用いてかまわない. 一例として, C 言語と `gnuplot` を利用する場合を以下に示しておく. 四則演算, 代入と `for` 文, 関数は `printf` と `sin` しか使っていないので, このソースコードは問題なく理解できると思う.

```
f001.c
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double delta_t = 0.01;      /* 横軸のきざみ幅 */
double start = -2.0*M_PI;   /* 横軸はじまり.  M_PI=3.1415... */
double end   =  2.0*M_PI;   /* 横軸おわり */

int main()
{
    double t;

    for ( t = start; t < end; t+=delta_t ){
        printf("%.3lf \t %.3lf\n",t, 2.0*sin(t));
    }
}
```

これをコンパイルして走らせると,

```
% gcc f001.c -lm
% ./a.out
```

```
-6.283  0.000
-6.273  0.040
-6.263  0.080
-6.253  0.120
-6.243  0.160
....
```

と, 2列でデータが出力される (左側の数字が横軸  $t$  の値, 右側が縦軸  $f(t)$  の値). これを適当なファイル名 (以下では `d001.dat`) で保存しておく. `gnuplot` は, いちいち立ち上げて使うより, 次のようにスクリプトファイルを書いておくと便利だ.

```
gp001
set terminal postscript "Helvetica" 24 color eps enhanced
set xlabel "{/Italic t}"
set ylabel "{/Italic f(t)}"
set nokey # これを含めると、凡例が表示されない。
set style line 1 lt 1 lw 5 pt 3 ps 1.0 # lw 5 は線の太さ。
plot [-6:6][:] "d001.dat" using 1:2 with lines linestyle 1
```

```
% ./a.out > d001.dat
% gnuplot gp001 > f001.eps
% evince f001.eps
```

これでグラフが表示されたはずである。これは関数  $f(t)$  を、 $f(t) \approx 2 \sin t$  と式 (6) の右辺第一項目だけで近似した結果である。

演習 2：横軸の範囲を  $-2\pi \leq t < 2\pi$  にとり、 $f^K(t) = 2 \left( \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kt \right)$  のグラフを作図せよ。ここで  $K$  の値は、 $K = 3, 5, 10, 100$  など、適当な値を数通り選ばばよい。ソースコードは、第  $K$  項目までを考えるには、f001.c を次のように変更すればよいだろう。

```
f002.c
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int K = 3; /* 何項目まで足すか */
double delta_t = 0.01;
double start = -2.0*M_PI; /* 横軸はじまり */
double end = 2.0*M_PI; /* 横軸おわり */

int main()
{
    int k;
    double t, f, y;

    for ( t = start; t < end; t+=delta_t ){

        y=0.0;
        for ( k = 1; k <= K; k++ ){
            y += 2.0*pow(-1.0, (double)(k+1)) * sin( t*(double)k )/(double)k;
        }
        printf("%.3lf \t %.3lf\n",t, y);
    }
}
```

実行した結果を d003.dat というファイル名で保存しておこう。

gp002

```
set terminal postscript "Helvetica" 24 color eps enhanced
set xlabel "{/Italic t}"
set ylabel "{/Italic f(t)}"
set style line 1 lt 1 lw 5 # 線や点の太さの定義
set style line 2 lt 1 lw 5
set style line 3 lt 1 lw 5
plot [-6:6][:] "d001.dat" using 1:2 title "K=1" with lines linestyle 1,\
"d003.dat" using 1:2 title "K=3" with lines linestyle 2
```

```
% gcc f002.c -lm
% ./a.out > d003.dat
% gnuplot gp002 > f003.eps
% evince f003.eps
```

$K = 1, 3, 10$  で実行して、それらの結果を重ねたものを図1左に示す。

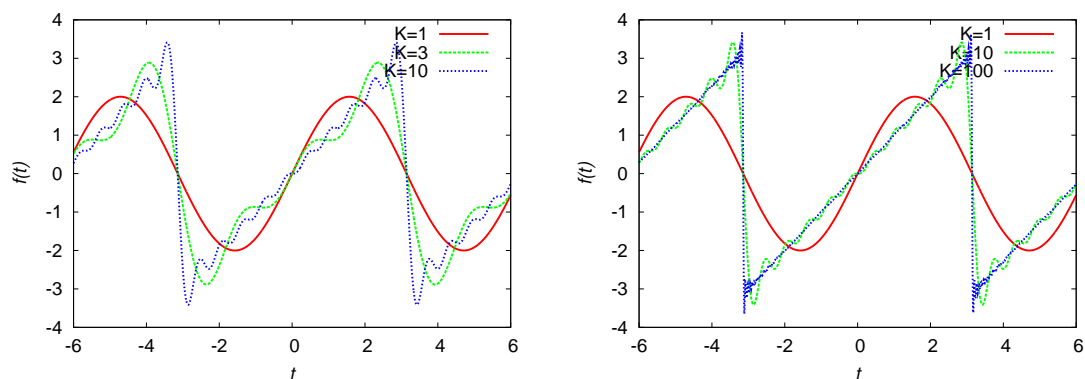


図1: のこぎり波のフーリエ級数展開. 左:  $f(t)$  を式 (6) の右辺, 第1項目だけ ( $K = 1$ ), 第3項目まで ( $K = 3$ ), 第10項目まで ( $K = 10$ ) を求めて, それぞれ近似して表現した結果. 右:  $K = 1, 10, 100$  の場合.

レポート課題1: 周期  $2\pi$  の関数

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq t < 0 \\ 0, & 0 \leq t < \pi \end{cases} \quad (7)$$

のグラフを手で描き, フーリエ級数を求めよ.

※注意点: この課題だけは手書きしたものを提出すること. フーリエ級数を求めるには, まず, フーリエ係数  $a_k, b_k$  を計算し,  $f(t)$  を式 (6) のように  $f(t) \approx \dots$  と, 適当な項まで表現すればよい. 式 (7) では, 区間  $-\pi \leq t < \pi$  でしか  $f(t)$  の値を定義していないが, 「周期  $2\pi$  の関数」という意味は  $f(t) = f(t + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  であるので,  $f(t)$  は

$-\infty < t < \infty$  で定義されている.

レポート課題 2: 上記の関数  $f(t)$  について, フーリエ級数展開した結果を図で示せ. 図 1 のように,  $K$  の値を数通り試し, 図を 2 枚は作成すること. レポートには, 単に図を貼り付けるだけでなく, 必ず考察を書き加えること.

レポート課題 3: 周期  $2\pi$  の関数

$$f(t) = t^2, \quad -\pi \leq t < \pi \quad (8)$$

について, 前問同様, フーリエ級数展開した図を作成し, 考察せよ. ここで関数  $f(t)$  を第  $K$  項目までのフーリエ級数展開した計算すると

$$f(t) \approx f^K(t) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kt \quad (9)$$

になる (計算は講義ノート参照).

レポート課題 4: 課題 1, 2 の関数  $f(t)$  について,  $f(t)$  とフーリエ級数展開  $f^K(t)$  との近似誤差を求めよ.

$f^K(t)$  は, フーリエ級数展開の項数  $K$  が増えるにしたがい, もとの関数  $f(t)$  に近づいていく,  $f(t) \approx f^K(t)$ . ここまでの課題で, このことは確認できたと思う. ただし, あくまで  $f(t) \approx f^K(t)$  であり,  $f(t) = f^K(t)$  とピッタリ一致するわけではない. 誤差がある. この近似誤差は,  $K$  の値が大きくなるにしたがい, ゼロに近づいていくだろうか. 近づいていく場合, どういうスピードでゼロに近づくか, これを調べてみよう. 近似の善し悪しは, 横軸に  $K$ , 縦軸に, 基本周期分 (上記の例題では  $2\pi$ ) の区間で,  $f(t)$  と  $f^K(t)$  との距離  $d(f, f^K)$  をプロットすると分かりやすい (教科書 5.7 節). 距離は, 公理 (対称性など) を満たせば, どういう指標を使ってもよい. たとえばユークリッド距離

$$d(f, f^K) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (f_i - f_i^K)^2} \quad (10)$$

などでよい<sup>5</sup>. ここで関数  $f(t)$  は, コンピュータ上では離散的に切り刻んで扱われているので  $n$  次元ベクトル  $f(t) \approx \vec{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})^T$  である. 区間  $-\pi \approx -3.14 \leq t < \pi \approx 3.14$  を  $\Delta t = 0.01$  で離散化した場合,  $n = 628$  となる.

---

<sup>5</sup>これを  $\Delta t = 0.01$  倍したものでよい

## レポート課題 5 (オプション課題) : データ圧縮

実際の音声の波形をフーリエ級数で表現してみよう。実験に使うバイオリンの「ド」の音の波形データ<sup>6</sup>や、実験用のソースコードは講義のページからダウンロードできるようにしている。

フーリエ級数の利点は次のような問題を考えると分かりやすい。今、別の地点に信号  $f(t)$  を送りたいとする。送り手は、信号  $f(t)$ <sup>7</sup> をそのまま送るのではなく、 $f(t)$  をフーリエ級数展開し、その係数  $a_0, a_1, b_1, \dots, a_K, b_K$  の値だけを相手に送る。受け取った側は、送られてきた  $2K + 1$  個の数字だけを用い、 $f(t)$  の再構成を試みる ( $f^K(t)$  を求める)。課題 1 の例では、 $K = 10 \ll n = 628$  であった。628 個の数字を送る代わりに 10 個の数字 (フーリエ係数) を送ってもそれなりに情報が伝わる。符号化<sup>8</sup>と復号化<sup>9</sup>に計算コストがかかるが、 $a_k, b_k$  の値は  $f(t)$  と  $\cos kt, \sin kt$  との内積で簡単に計算できる。

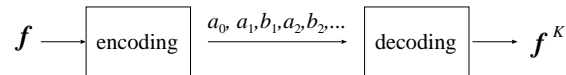


図 2: 628 個の数字を送る代わりに 10 個の数字を送っても、それなりに情報は伝わる。

## レポート課題 6 : (A4 一枚程度)

フーリエ級数について理解が深まっただろうか。頭の中が???だらけになっているかもしれない。フーリエ級数について、理解できた点、理解できない点・疑問点などを、少なくとも 3 つ程度、具体的に箇条書きし、それぞれの項目について考察せよ。レポートの最後には、感想を記述してほしい。このプリント中に理解しにくい点があった場合は、何ページ何行目の、どこの部分が 分かりにくかったか、具体的に、指摘してほしい。

### 注意事項 :

1. レポートの L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X を使った簡単な書き方は <http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/latex/latexreport.html> を参照。
2. 評価は、レポートに書かれている内容、「1. 何を調べようとしているのか (目的), 2. 得られた結果 (図) とその説明, 3. 考察」で判断します。特に、考察, 感想は、型通りではなく、他人とは違う内容を書こうとしているかを見ます。
3. レポートは、1 年前の自分が読んでも分かるように書いていれば OK (簡単ではない)。
4. 独力で課題が遂行できそうにない場合は、早めに相談すること。

<sup>6</sup>  $n = 628$  次元のベクトル  $f(t) \approx \vec{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{627})^T$

<sup>7</sup> くだいがここでは関数  $f(t)$  は  $n$  次元ベクトル  $\vec{f}$

<sup>8</sup> 係数  $a_k, b_k$  の値を求めること ( $k = 0, 1, \dots$ )

<sup>9</sup> 係数  $a_k, b_k$  の値から  $f(t)$  を再構成すること