パターン認識

http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/pattern/

伊達 章

宮崎大学 工学部 情報システム工学科

2018 年 10 月 17 日

講義のスケジュール（案）

1. 講義の概要
2. 準備：確率・統計の基礎
3. 準備：octave の使い方
4. 教師あり学習．識別関数
5. 最大事後確率則，最小誤識別則，ベイズ決定則
6. 最尤推定法 1：ガウスモデル
7. 最尤推定法 2：線形判別分析
8. 線形判別分析により手書き文字認識 1
9. 線形判別分析により手書き文字認識 2
10. 混合ガウスモデルの最尤推定 1
11. 混合ガウスモデルの最尤推定 2
12. ノンパラメトリックな手法 (1)：カーネル密度推定法
13. ノンパラメトリックな手法 (2)：k-最近傍則
14. ノンパラメトリックな手法 (3)：パーセプトロン
15. 定期試験，解説

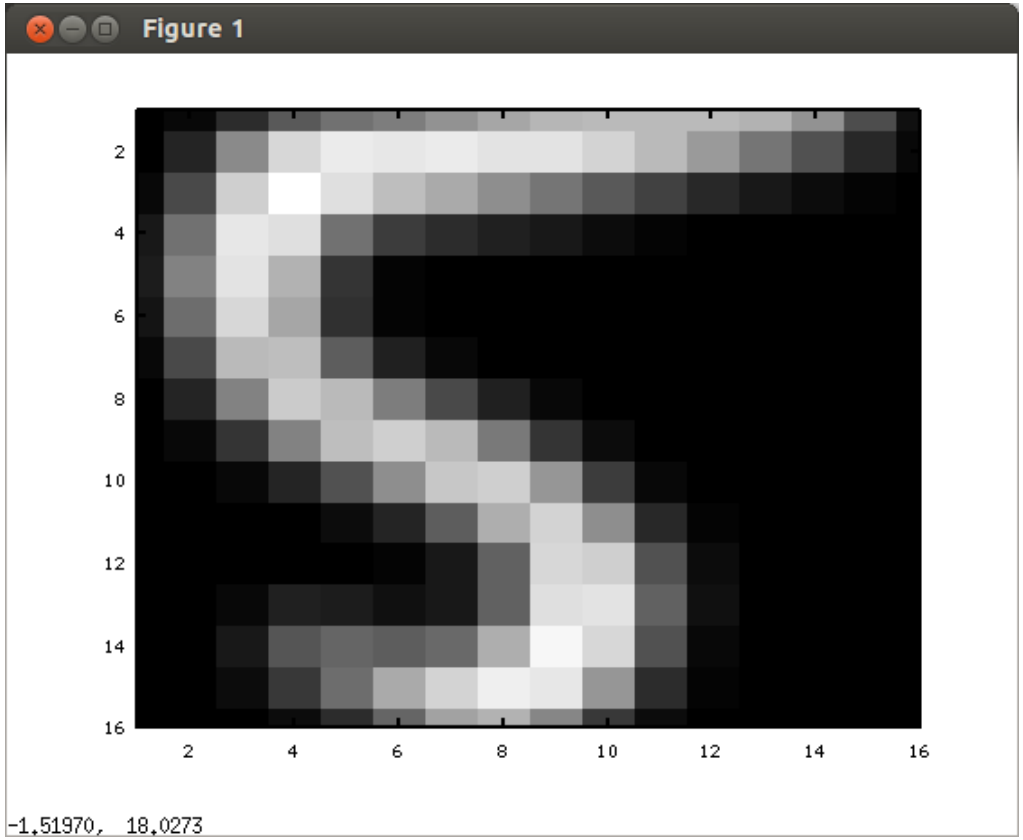
確率・統計の基礎

基本知識（確率・統計の復習）

- 確率変数，確率密度関数
- 平均 μ，分散 σ^2，標準偏差 σ
- 期待値，分散共分散行列
- 独立，相関係数，無相間
- 確率分布：一様分布，正規分布，ガウス分布
- 同時確率，条件付き確率，周辺確率
- ベイズの公式，事前確率・事後確率
- 擬似乱数の生成，独立同一分布（i.i.d.）
- 多次元正規分布

生成モデルに基づくパターン認識

'5' →
生成



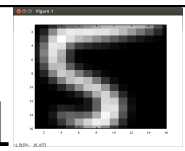
→ y: '5'
認識

観測データ $\boldsymbol{x}$, 推定対象 y

パターン認識の問題

識別関数 $f(\boldsymbol{x})$ を作ること

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{256}) \rightarrow y = f(\boldsymbol{x})$$

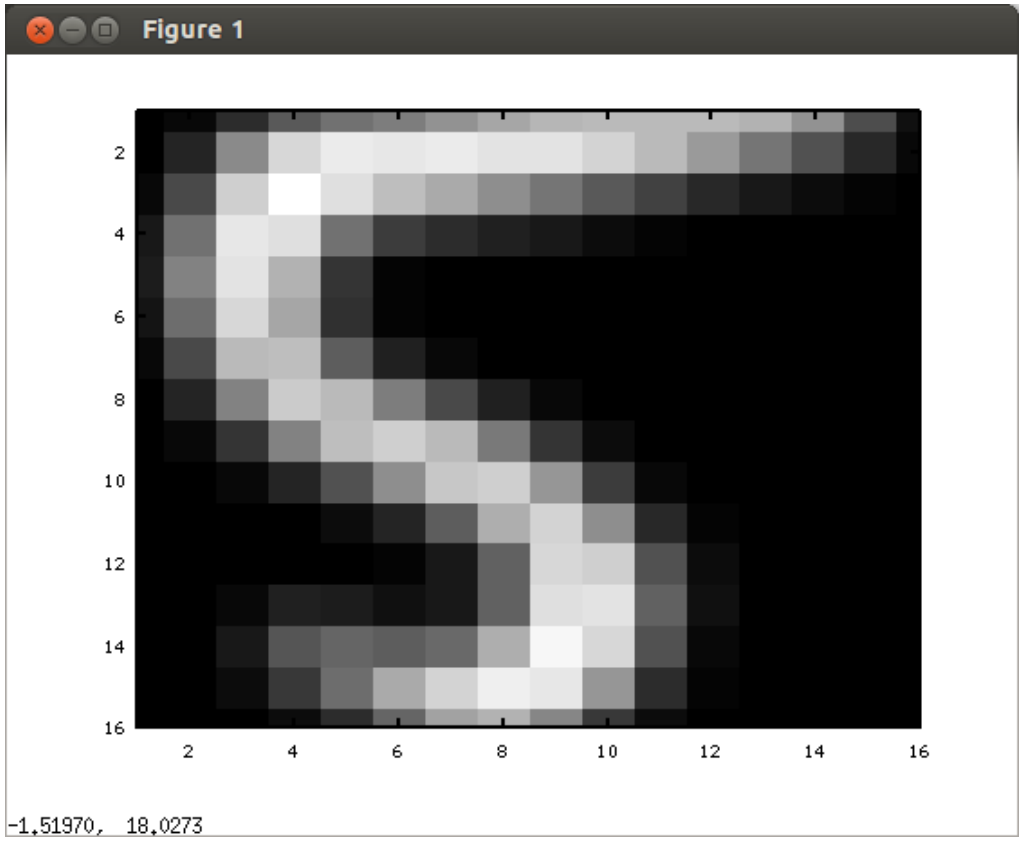
	$\boldsymbol{x}$	y
0	$00\cdots00000000$	$f(\boldsymbol{x}_0)$
1	$00\cdots00000001$	$f(\boldsymbol{x}_1)$
2	$00\cdots00000010$	$f(\boldsymbol{x}_2)$
3	$00\cdots00000011$	$f(\boldsymbol{x}_3)$
	$\vdots$	
k	$00\cdots11101011$ 	$f(\boldsymbol{x}_k) = 5$
	$\vdots$	
$2^{256}-1$	$11\cdots1111111$	$f(\boldsymbol{x}_{2^{256}-1})$

$x_i \in \{0, 1\}$ の場合. $2^{16\times16} = 2^{256} \approx 10^{75}$

モデル化
確率的生成モデル

確率的生成モデルに基づくパターン認識

'5' →
生成



→ y: '5'
認識

$$y \sim p(y) \rightarrow \text{データ } \boldsymbol{x} \sim p(\boldsymbol{x}|y) \rightarrow \text{認識 } \hat{y} = \underset{y}{\operatorname{argmax}}\, p(y|\boldsymbol{x})$$

モデル化： $p(y)$ と $p(\boldsymbol{x}|y)$ を設計する！

モデル化：確率的生成モデル

- $p(y)$： 事前分布，事前確率
  どの数字が出現する確率が高い？
- $p(\boldsymbol{x}|y)$： データモデル
  例：数字「2」を書いてもらった．そのとき画像 $\boldsymbol{x}$ が描かれる確率
- $\boldsymbol{x}$ （画像データ，観測できる）
- y カテゴリ（認識の際は見えない，隠れ変数）

モデル化：確率的生成モデル

- $p(y)$： 事前分布，事前確率
  どの数字が出現する確率が高い？
- $p(\boldsymbol{x}|y)$： データモデル
  例：数字「2」を書いてもらった．そのとき画像 $\boldsymbol{x}$ が描かれる確率
- $\boldsymbol{x}$ （画像データ，観測できる）
- y カテゴリ（認識の際は見えない，隠れ変数）

↑これらはこの教科書での文字の使い方．
世の中では $\boldsymbol{x}$ と y の使い方が逆

ともかく確率が重要

確率，条件付き確率

	B_1 （風邪）	B_2 （風邪なし）	$p(A_i)$
A_1 （熱あり）	0.55	0.05	0.60
A_2 （熱なし）	0.10	0.30	0.40
$p(B_j)$	0.65	0.35	

例

同時確率 $p(A_1, B_1) = 0.55$

周辺確率 $p(A_1) = \sum_i p(A_1, B_i) = p(A_1) = 0.6$

条件付き確率

熱の有無を知る ⇒ 風邪であるかどうか検討がつく：

$$p(B_1|A_1) = \frac{p(B_1)p(A_1|B_1)}{p(A_1)} = \frac{p(A_1, B_1)}{p(A_1)} = \frac{0.55}{0.6} \approx 0.92$$

確率，条件付き確率

	B_1 （白）	B_2 （黒）	$p(A_i)$
A_1 （白）	0.55	0.05	0.60
A_2 （黒）	0.10	0.30	0.40
$p(B_j)$	0.65	0.35	

例：A と B はそれぞれ画像を構成するピクセル

同時確率 $p(A_1, B_1) = 0.55$

周辺確率 $p(A_1) = \sum_i p(A_1, B_i) = p(A_1) = 0.6$

条件付き確率

A の白黒を知る $\Rightarrow$ B が白黒どちらであるか検討がつく：

$$p(B_1|A_1) = \frac{p(B_1)p(A_1|B_1)}{p(A_1)} = \frac{p(A_1, B_1)}{p(A_1)} = \frac{0.55}{0.6} \approx 0.92$$

ベイズの公式

- ベイズの公式

  熱があった（A_1）とする.
  その時，風邪のある（B_1），なし（B_2）の確率

$$p(B_1|A_1) = \frac{p(B_1)p(A_1|B_1)}{p(A_1)} = \frac{p(A_1, B_1)}{p(A_1)} = \frac{0.55}{0.6} \approx 0.92$$

$$p(B_2|A_1) = \frac{p(B_2)p(A_1|B_2)}{p(A_1)} = \frac{p(A_1, B_2)}{p(A_1)} = \frac{0.05}{0.6} \approx 0.08$$

- 事後確率最大化（ベイズ推定）　$\underset{i}{\operatorname{argmax}}\, p(B_i|A_1) = 1$

  風邪であることの方が確率が大 ⇒ 風邪であると推定

  入力（観測値）：A 熱のあるなし
  ⇒ 出力（推定値）　B 風邪かどうか

平均，分散

- 平均 μ，期待値 $\mathsf{E}[x]$

$$\mu = \mathsf{E}[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i), \quad \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

平均，分散

- 平均 μ，期待値 $\mathsf{E}[x]$

$$\mu = \mathsf{E}[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i), \quad \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

平均は分かった．例： 数学のテストの平均 70 点
その周りにどの程度の幅でばらついているかも知りたい！

平均，分散

- 平均 μ，期待値 $\mathsf{E}[x]$

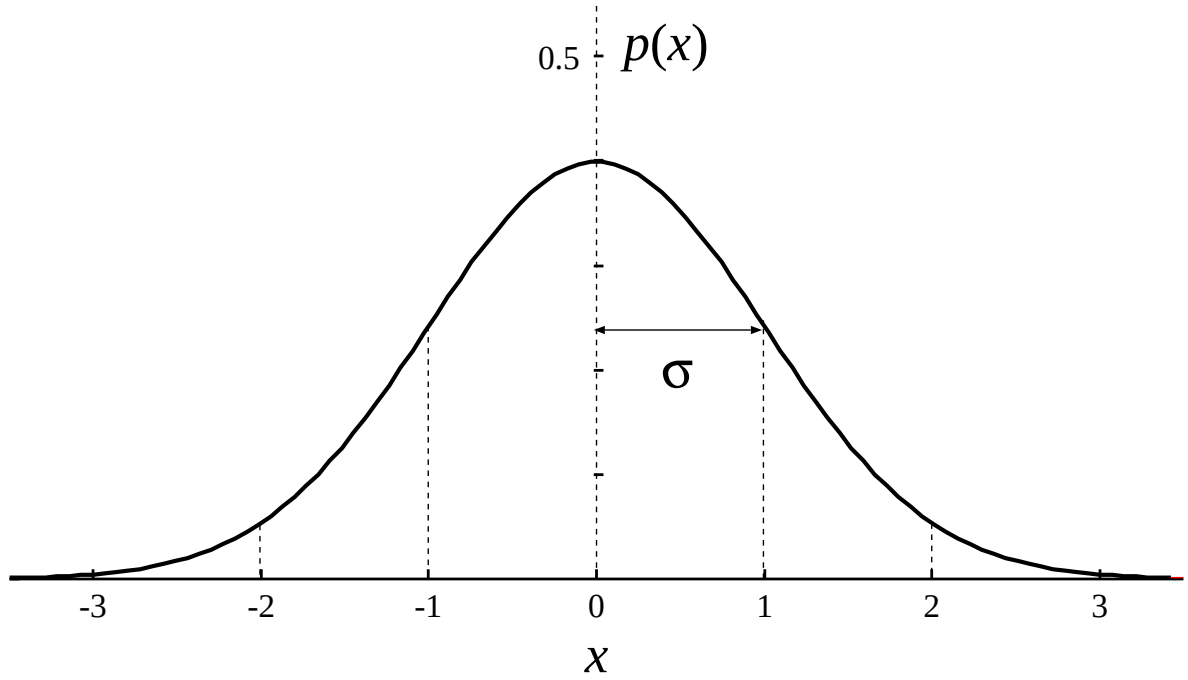
$$\mu = \mathsf{E}[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i), \quad \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$$

平均は分かった．例： 数学のテストの平均 70 点
その周りにどの程度の幅でばらついているかも知りたい！

- 分散 σ^2，標準偏差 σ ： 【一つの指標】

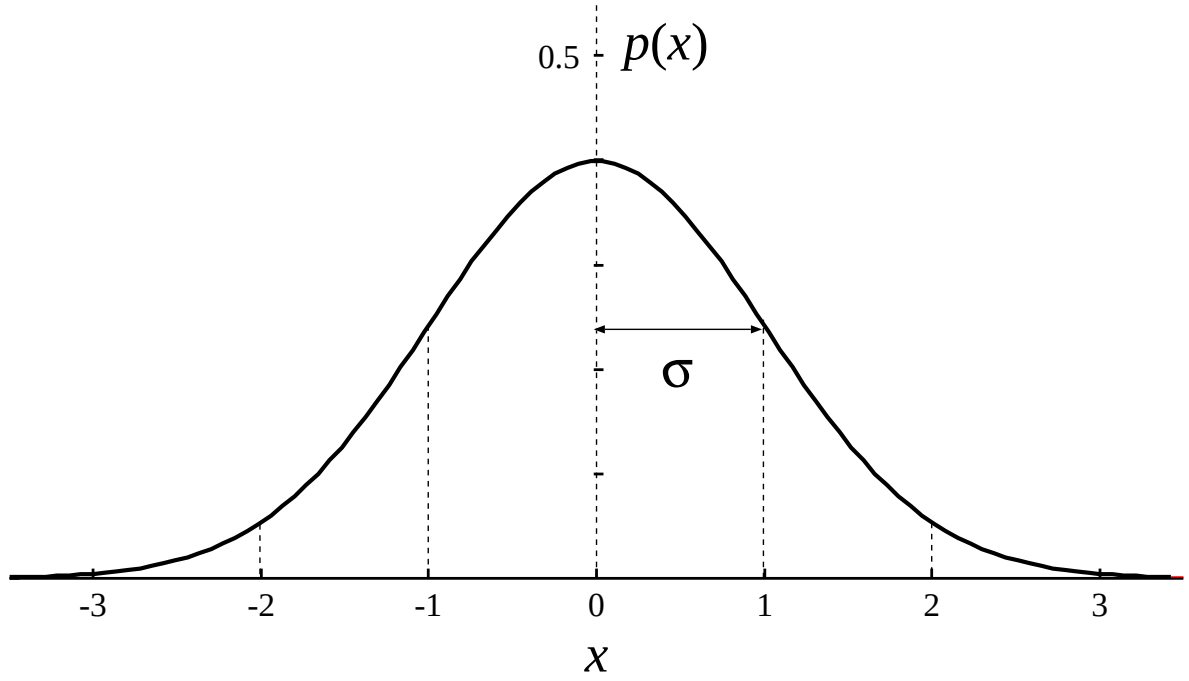
$$\sigma^2 = \mathsf{E}[(x - \mu)^2]$$

正規分布，ガウス分布



「$x_1, x_2, \cdots .x_{100}$ を平均 μ, 分散 σ^2 の互いに独立なガウス分布に従う確率変数とする」

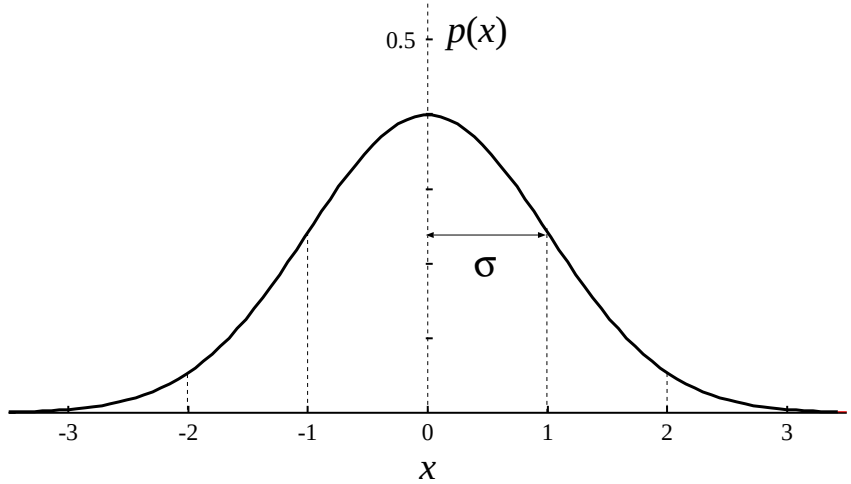
正規分布，ガウス分布 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$



$$p(x;\theta,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ p(x;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

正規分布，ガウス分布

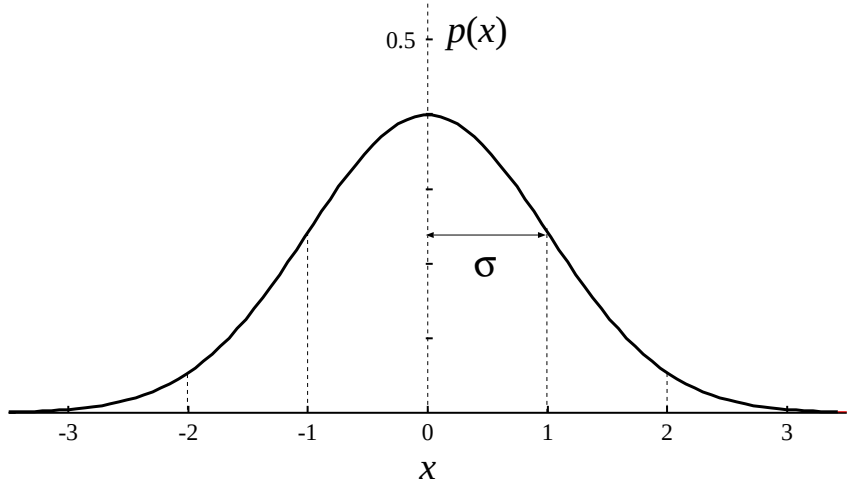


$$p(x;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$x_i, i = 1, \cdots, 1000$ のうち約 68.26% が $-1 < x_i < 1$ に含まれている．その根拠：

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = 0.6826$$

正規分布，ガウス分布



$$\int_{-2}^{2} p(x)dx = 0.9544, \quad \int_{-3}^{3} p(x)dx = 0.9974$$

基本知識（確率・統計の復習）

- 確率変数，確率密度関数
- 平均 μ，分散 σ^2，標準偏差 σ
- 期待値，分散共分散行列
- 独立，相関係数，無相間
- 確率分布：一様分布，正規分布，ガウス分布
- 同時確率，条件付き確率，周辺確率
- ベイズの公式，事前確率・事後確率
- 擬似乱数の生成，独立同一分布（i.i.d.）
- 多次元正規分布

擬似乱数

- 一様分布 [0:1]

```
octave:1> rand(5)
ans =

   0.556212   0.518803   0.589602   0.645093   0.707168
   0.088337   0.307372   0.859300   0.790555   0.412982
   0.756140   0.217823   0.442209   0.815839   0.149388
   0.573751   0.336075   0.236351   0.863245   0.413433
   0.397294   0.884367   0.719179   0.476957   0.571799

octave:2> rand(5,1)
ans =

   0.52111
   0.49983
   0.26851
   0.58936
   0.93169
```

擬似乱数

- 正規分布（ガウス分布）
  平均 μ=72, 標準偏差 σ=8 の正規分布 $\mathcal{N}(72, 8^2)$ にしたがうデータを 5 個生成

```
octave:14> 8*randn(1,5) + 72
ans =

   70.927   76.224   78.489   70.905   69.532
```

擬似乱数

- 正規分布（ガウス分布）
  平均 μ=72, 標準偏差 σ=8 の正規分布 $\mathcal{N}(72, 8^2)$ にしたがうデータを 5 個生成

```
octave:14> 8*randn(1,5) + 72
ans =

   70.927   76.224   78.489   70.905   69.532
```

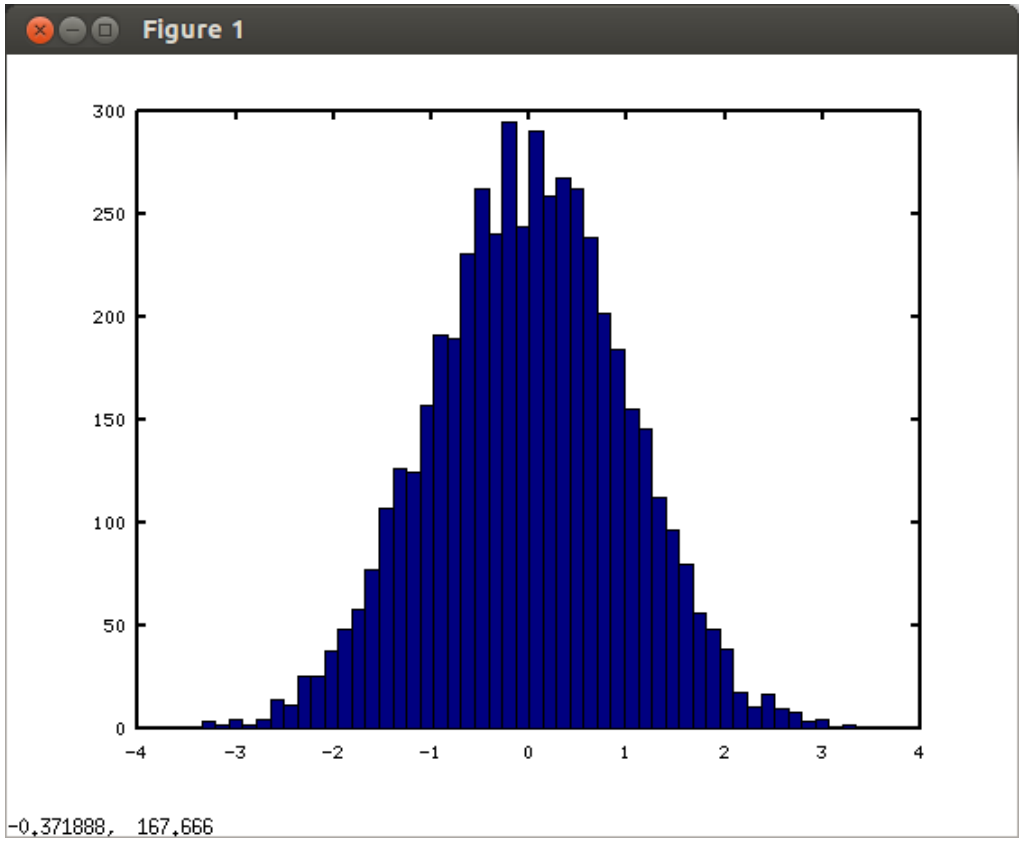
- 標準偏差 σ の意味？！

octave で正規分布にしたがうデータを生成

```
1 octave:1>  x = 0.7*randn(200,1);
2 octave:2> mean(x)
3 ans =  0.076972
4 octave:3> sqrt(var(x))
5 ans =  0.68542
```

- 平均 $\mu = 0$, 標準偏差 $\sigma = 0.7$ の正規分布にしたがうデータを 200 個生成
- 正規分布（= Gauss 分布）とは？
- seed の設定： randn ("seed", 20141022)

正規分布（ガウス分布）




```
1 octave:19> x=randn(5000,1);
2 octave:21> hist(x,50)
```

- $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(0, 1)$ にしたがう 5000 のデータ
- $[-1:1]$ にあるデータは何%？　$[-3:3]$ は？

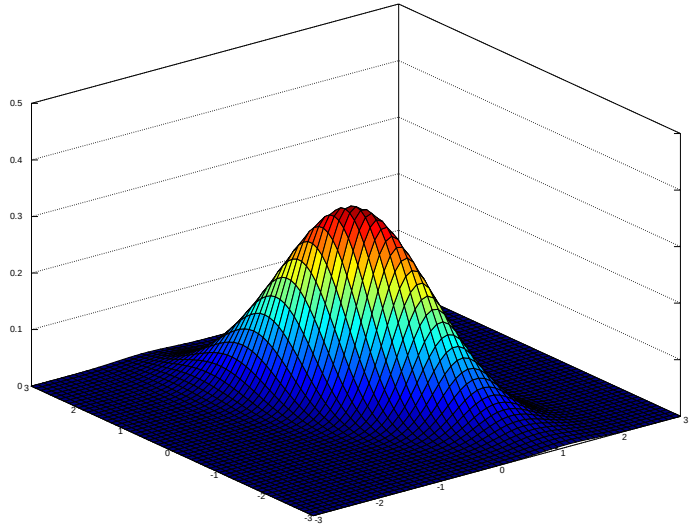
確かめてみる

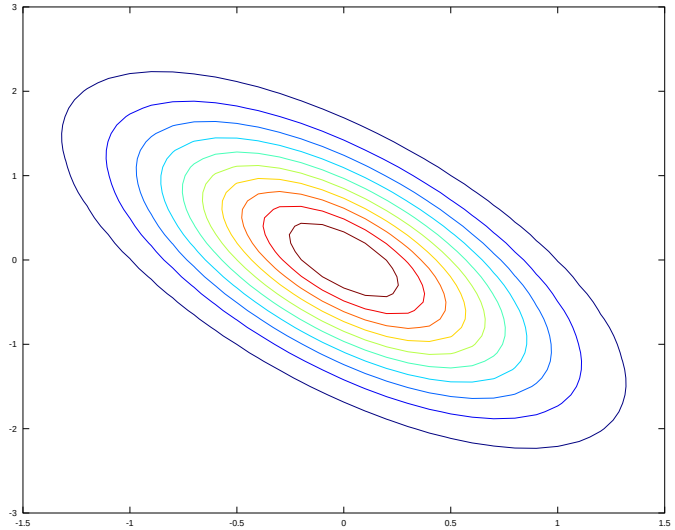
```
1  n=5000 % 生成するデータの個数
2  s=2.0; % 1,2,3 と値を変えてみる
3  x=randn(n,1);  % 正規分布の乱数を生成
4
5  c=0;
6  for i=1:n
7    if ( x(i) > -s && x(i) < s )
8      c=c+1;
9    end
10 end
11 c, c/n
```

※ for 文を使っているので，参考にしすぎないこと！

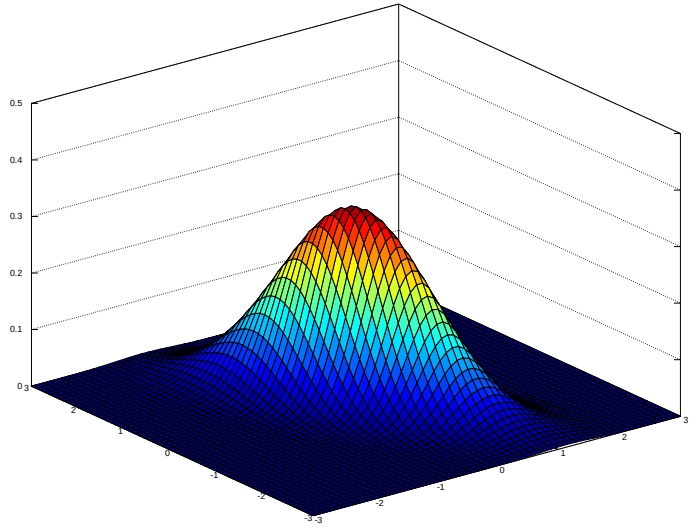
2次元正規分布

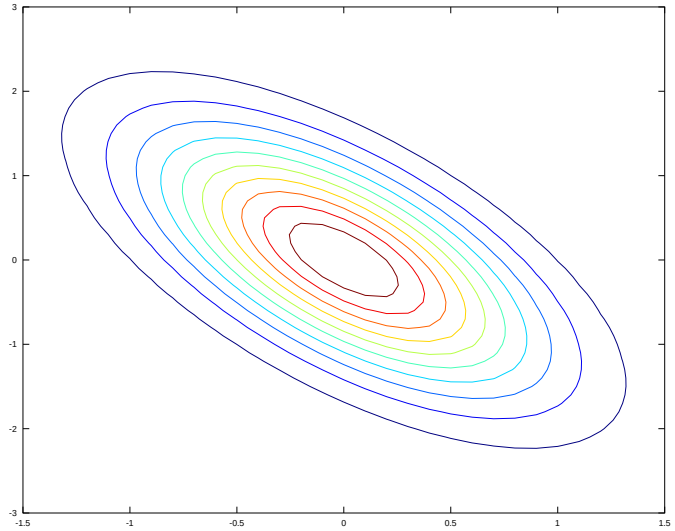
2 次元正規分布





多次元正規分布





分散共分散行列 V

$$
\begin{aligned}
V &= \begin{pmatrix} \sigma_{x^2} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{y^2} \end{pmatrix} \\
\sigma_x^2 &= \mathrm{E}[(x-\mu_x)^2] \\
\sigma_{xy} &= \mathrm{E}[(x-\mu_x)(y-\mu_y)] \\
V &= \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}] \qquad (1) \\
&\approx \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}(\boldsymbol{x}^{\alpha}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}^{\alpha}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

V は対称行列，正定値（すべての固有値が正）

終