

レポート課題： フーリエ級数

提出締切 12 月 3 日 (月) 18:00. 提出先： A-333

目的： jpeg 画像データや, mp3 音データには, もとのデータが約 1/10 に圧縮されて保存されている. ここにフーリエ級数の考え方が使われている. このフーリエ級数とはなにか. コンピュータを使い, その仕組みを適切にイメージできるようにしよう.

基礎知識 (教科書第 5 章, pp.63-70.)

基本周期 2π の関数 $f(t)$ のフーリエ級数展開は

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos kt + b_k \sin kt\} \quad (1)$$

と書ける¹. ここで係数 a_k, b_k は

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt \quad (2)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt \quad (3)$$

である². しばらくの間, 具体例として, 「のこぎり波」とよばれる周期 2π の関数

$$f(t) = t, \quad -\pi \leq t \leq \pi \quad (4)$$

を考えよう. この場合, 係数 a_k, b_k は簡単に計算できて

$$a_k = 0, \quad b_k = (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \quad (5)$$

となり³, $f(t)$ は

$$f(t) \approx 2 \left(\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t - \frac{1}{4} \sin 4t + \dots \right) \quad (6)$$

と近似的に表現できる (\approx は $=$ ではなく, ほぼ等しいという意味の記号). この例では, 偶然 \cos 項が消えた⁴. この結果は, ギザギザ直線の「のこぎり波」が, なめらかな曲線 $\sin kt$ の足し合わせで近似的に表現できることを意味している (本当か?).

¹基本周期 2π という条件が必要. $f(t)$ の基本周期が T の場合, どう対応すればよいか. $f(t)$ が周期関数でなければ, どう対応すればよいか. a_0 だけ, なぜ $\frac{1}{2}$ 倍されているのか.

²これらの式を暗記する必要はない. しかし, 式の意味は完全に理解しておく必要がある.

³ $(-1)^{k+1}$ の値は 1 か -1 しかとらない. k が偶数のときは -1 , 奇数のときは 1.

⁴何としらじらしい, こうなるような関数を選んだくせに!

コンピュータ演習

まずは `gnuplot` を使い, $f(t)$ をフーリエ級数展開した結果を作図してみよう (教科書 p.64 の図 5.1 を再現).

演習 1: 横軸の範囲を $-2\pi \leq t < 2\pi$ にとり, $f^0(t) = 2\sin t$ のグラフを作図せよ.

人間は $f(t) = 2\sin t$ とか $f(t) = t^2$ などの連続関数を簡単に扱えるが, コンピュータでは, そうはいかない. t を適当な小さい間隔で刻み (離散化), そのとびとびの値での $f(t)$ の値を並べたものを $f(t)$ とみなそう. 関数 \approx 高次元ベクトル: $f(t) \approx \vec{f} = (f_0, f_1, \dots)$. 作図には, 好みのプログラミング言語, ツールを用いてかまわない. 一例として, C 言語と `gnuplot` を利用する場合を以下に示しておく. 四則演算, 代入と `for` 文, 関数は `printf` と `sin` しか使っていないので, このソースコードは問題なく理解できると思う.

```
f001.c
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double delta_t = 0.01;      /* 横軸のきざみ幅 */
double start = -2.0*M_PI;   /* 横軸はじまり. M_PI=3.1415... */
double end = 2.0*M_PI;     /* 横軸おわり */

int main()
{
    double t;

    for ( t = start; t < end; t+=delta_t ){
        printf("%.3lf \t %.3lf\n",t, 2.0*sin(t));
    }
}
```

これをコンパイルして走らせると,

```
% gcc f001.c -lm
% ./a.out
```

```
-6.283  0.000
-6.273  0.040
-6.263  0.080
-6.253  0.120
-6.243  0.160
....
```

と, 2列でデータが出力される (左側の数字が横軸 t の値, 右側が縦軸 $f(t)$ の値). これを適当なファイル名 (以下では `d001.dat`) で保存しておく. `gnuplot` は, いちいち立ち上げて使うより, 次のようにスクリプトファイルを書いておくと便利だ.

```
gp001
set terminal postscript "Helvetica" 24 color eps enhanced
set xlabel "{/Italic t}"
set ylabel "{/Italic f(t)}"
set nokey # これを含めると、凡例が表示されない。
set style line 1 lt 1 lw 5 pt 3 ps 1.0 # lw 5 は線の太さ。
plot [-6:6][:] "d001.dat" using 1:2 with lines linestyle 1
```

```
% ./a.out > d001.dat
% gnuplot gp001 > f001.eps
% evince f001.eps
```

これでグラフが表示されたはずである。これは関数 $f(t)$ を、 $f(t) \approx 2 \sin t$ と式 (6) の右辺第一項目だけで近似した結果である。

演習 2：横軸の範囲を $-2\pi \leq t < 2\pi$ にとり、 $f^K(t) = 2 \left(\sum_{k=1}^K \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kt \right)$ のグラフを作図せよ。ここで K の値は、 $K = 3, 5, 10, 100$ など、適当な値を数通り選ばばよい。ソースコードは、第 K 項目までを考えるには、f001.c を次のように変更すればよいだろう。

```
f002.c
#include <stdio.h>
#include <math.h>

int K = 3; /* 何項目まで足すか */
double delta_t = 0.01;
double start = -2.0*M_PI; /* 横軸はじまり */
double end = 2.0*M_PI; /* 横軸おわり */

int main()
{
    int k;
    double t, f, y;

    for ( t = start; t < end; t+=delta_t ){

        y=0.0;
        for ( k = 1; k <= K; k++ ){
            y += 2.0*pow(-1.0, (double)(k+1)) * sin( t*(double)k )/(double)k;
        }
        printf("%.3lf \t %.3lf\n",t, y);
    }
}
```

実行した結果を d003.dat というファイル名で保存しておこう。

gp002

```
set terminal postscript "Helvetica" 24 color eps enhanced
set xlabel "{/Italic t}"
set ylabel "{/Italic f(t)}"
set style line 1 lt 1 lw 5 # 線や点の太さの定義
set style line 2 lt 1 lw 5
set style line 3 lt 1 lw 5
plot [-6:6][:] "d001.dat" using 1:2 title "K=1" with lines linestyle 1,\
"d003.dat" using 1:2 title "K=3" with lines linestyle 2
```

```
% gcc f002.c -lm
% ./a.out > d003.dat
% gnuplot gp002 > f003.eps
% evince f003.eps
```

$K = 1, 3, 10$ で実行して, それらの結果を重ねたものを図1左に示す.

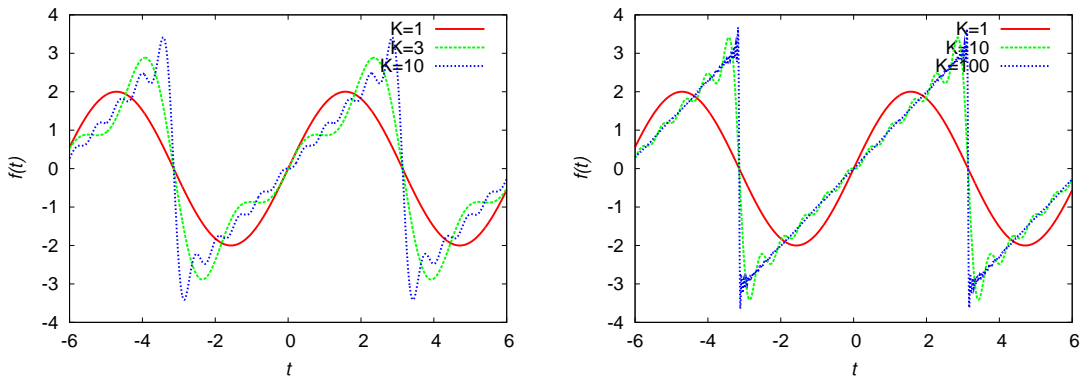


図1: のこぎり波のフーリエ級数展開. 左: $f(t)$ を式 (6) の右辺, 第1項目だけ ($K = 1$), 第3項目まで ($K = 3$), 第10項目まで ($K = 10$) を求めて, それぞれ近似して表現した結果. 右: $K = 1, 10, 100$ の場合.

レポート課題1: 周期 2π の関数

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq t < 0 \\ 0, & 0 \leq t < \pi \end{cases} \quad (7)$$

のグラフを手で描き, フーリエ級数を求めよ.

※注意点: この課題だけは手書きしたものを提出すること. フーリエ級数を求めるには, まず, フーリエ係数 a_k, b_k を計算し, $f(t)$ を式 (6) のように $f(t) \approx \dots$ と, 適当な項まで表現すればよい. 式 (7) では, 区間 $-\pi \leq t < \pi$ でしか $f(t)$ の値を定義していないが, 「周期 2π の関数」という意味は $f(t) = f(t + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ であるので, $f(t)$ は

$-\infty < t < \infty$ で定義されている.

レポート課題 2: 上記の関数 $f(t)$ について, フーリエ級数展開した結果を図で示せ. 図 1 のように, K の値を数通り試し, 図を 2 枚は作成すること. レポートには, 単に図を貼り付けるだけでなく, 必ず考察を書き加えること.

レポート課題 3: 周期 2π の関数

$$f(t) = t^2, \quad -\pi \leq t < \pi \quad (8)$$

について, 前問同様, フーリエ級数展開した図を作成し, 考察せよ. ここで関数 $f(t)$ を第 K 項目までのフーリエ級数展開した計算すると

$$f(t) \approx f^K(t) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{k=1}^K \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kt \quad (9)$$

になる (計算は講義ノート参照).

レポート課題 4: 課題 1, 2 の関数 $f(t)$ について, $f(t)$ とフーリエ級数展開 $f^K(t)$ との近似誤差を求めよ.

$f^K(t)$ は, フーリエ級数展開の項数 K が増えるにしたがい, もとの関数 $f(t)$ に近づいていく, $f(t) \approx f^K(t)$. ここまでの課題で, このことは確認できたと思う. ただし, あくまで $f(t) \approx f^K(t)$ であり, $f(t) = f^K(t)$ とピッタリ一致するわけではない. 誤差がある. この近似誤差は, K の値が大きくなるにしたがい, ゼロに近づいていくだろうか. 近づいていく場合, どういうスピードでゼロに近づくか, これを調べてみよう. 近似の善し悪しは, 横軸に K , 縦軸に, 基本周期分 (上記の例題では 2π) の区間で, $f(t)$ と $f^K(t)$ との距離 $d(f, f^K)$ をプロットすると分かりやすい (教科書 5.7 節). 距離は, 公理 (対称性など) を満たせば, どういう指標を使ってもよい. たとえばユークリッド距離

$$d(f, f^K) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (f_i - f_i^K)^2} \quad (10)$$

などでよい⁵. ここで関数 $f(t)$ は, コンピュータ上では離散的に切り刻んで扱われているので n 次元ベクトル $f(t) \approx \vec{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})^T$ である. 区間 $-\pi \approx -3.14 \leq t < \pi \approx 3.14$ を $\Delta t = 0.01$ で離散化した場合, $n = 628$ となる.

⁵これを $\Delta t = 0.01$ 倍したものでよい

レポート課題 5 (オプション課題) : データ圧縮

実際の音声の波形をフーリエ級数で表現してみよう. 実験に使うバイオリンの「ド」の音の波形データ⁶や, 実験用のソースコードは講義のページからダウンロードできるようにしている.

フーリエ級数の利点は次のような問題を考えると分かりやすい. 今, 別の地点に信号 $f(t)$ を送りたいとする. 送り手は, 信号 $f(t)$ ⁷ をそのまま送るのではなく, $f(t)$ をフーリエ級数展開し, その係数 $a_0, a_1, b_1, \dots, a_K, b_K$ の値だけを相手に送る. 受け取った側は, 送られてきた $2K + 1$ 個の数字だけを用い, $f(t)$ の再構成を試みる ($f^K(t)$ を求める). 課題 1 の例では, $K = 10 \ll n = 628$ であった. 628 個の数字を送る代わりに 10 個の数字 (フーリエ係数) を送ってもそれなりに情報が伝わる. 符号化⁸と復号化⁹に計算コストがかかるが, a_k, b_k の値は $f(t)$ と $\cos kt, \sin kt$ との内積で簡単に計算できる.

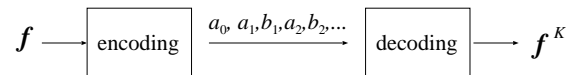


図 2: 628 個の数字を送る代わりに 10 個の数字を送っても, それなりに情報は伝わる.

レポート課題 6 : (A4 一枚程度)

フーリエ級数について理解が深まっただろうか. 頭の中が???だらけになっているかもしれない. フーリエ級数について, 理解できた点, 理解できない点・疑問点などを, 少なくとも 3 つ程度, 具体的に箇条書きし, それぞれの項目について考察せよ. レポートの最後には, 感想を記述してほしい. このプリント中に理解しにくい点があった場合は, 何ページ何行目の, どの部分が 分かりにくかったか, 具体的に, 指摘してほしい.

注意事項 :

1. レポートの L^AT_EX を使った簡単な書き方は <http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/latex/latexreport.html> を参照.
2. L^AT_EX は Cloud L^AT_EX を使う手もある (便利. 新規登録が必要) <https://cloudlatex.io/ja>
3. 評価は, レポートに書かれている内容, 「1. 何を調べようとしているのか (目的), 2. 得られた結果 (図) とその説明, 3. 考察」で判断します. 特に, 考察, 感想は, 型通りではなく, 他人とは違う内容を書こうとしているかを見ます.
4. レポートは, 1 年前の自分が読んでも分かるように書いていれば OK (簡単ではない).
5. 独力で課題が遂行できそうにない場合は, 早めに相談すること.

⁶ $n = 628$ 次元のベクトル $f(t) \approx \vec{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{627})^T$

⁷くどいがここでは関数 $f(t)$ は n 次元ベクトル \vec{f}

⁸係数 a_k, b_k の値を求めること ($k = 0, 1, \dots$)

⁹係数 a_k, b_k の値から $f(t)$ を再構成すること