応用数学 2
2019 年 11 月 11 日

レポート課題： フーリエ級数

提出締切 11 月 29 日（金）18:00．提出先：A-333

目的： `jpeg` 画像データや，`mp3` 音データには，もとのデータが 約 1/10 に圧縮されて保存されている．ここにフーリエ級数の考え方が使われている．このフーリエ級数とはなにか．コンピュータを使い，その仕組みをイメージできるようになろう．

基礎知識（教科書第 5 章，pp.63–70）

基本周期 2π の関数 $f(t)$ のフーリエ級数展開は

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos kt+b_k\sin kt\} \tag{1}$$

と書ける[1]．ここで係数 a_k, b_k は

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\mathrm{d}t \tag{3}$$

である[2]．しばらくの間，具体例として,「のこぎり波」とよばれる周期 2π の関数

$$f(t) = t,\ -\pi \leqq t < \pi \tag{4}$$

を考えよう．この場合，係数 a_k, b_k は簡単に手で計算でき

$$a_k = 0, \qquad b_k = (-1)^{k+1}\frac{2}{k} \tag{5}$$

となり[3]，$f(t)$ は

$$f(t) \approx 2\left(\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin 3t-\frac{1}{4}\sin 4t+\cdots\right) \tag{6}$$

と近似的に表現できる（$\approx$ は $=$ ではなく，ほぼ等しいという意味の記号）．この例では，偶然 cos 項が消えた[4]．この結果は，ギザギザ直線の「のこぎり波」が，なめらかな曲線 $\sin kt$ の足し合わせで近似的に表現できることを意味している（本当か？）．

[1] 基本周期 2π という条件が必要．$f(t)$ の基本周期が T の場合，どう対応すればよいか．$f(t)$ が周期関数でなければ，どう対応すればよいか．a_0 だけ，なぜ $\frac{1}{2}$ 倍されているのか．

[2] これらの式を暗記する必要はない．しかし，式の意味は完全に理解しておく必要がある．

[3] $(-1)^{k+1}$ の値は 1 か -1 しかとらない．k が偶数のときは -1，奇数のときは 1.

[4] 何としらじらしい，こうなるような関数を選んだくせに！

コンピュータ演習

$f(t)$ をフーリエ級数展開した結果を作図してみよう（教科書 p.64 の図 5.1 を再現）．作図には，好みのプログラミング言語，ツールを用いてかまわない．ここでは一例として，Python で実現する例を示す．

演習 1：横軸の範囲を $-2\pi \leqq t < 2\pi$ にとり，$f^1(t) = 2\sin t$ のグラフを作図せよ．

人間は $f(t) = 2\sin t$ とか $f(t) = t^2$ などの連続関数を簡単に扱えるが，コンピュータでは，そうはいかない．t を適当な小さい間隔で刻み（離散化），そのとびとびの値での $f(t)$ の値を並べたものを $f(t)$ とみなそう．関数 $\approx$ 高次元ベクトル：$f(t) \approx \boldsymbol{f} = (f_0, f_1, \cdots,)$.

fse101.py

```
# -*- coding: utf-8 -*-
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(t):
    return 2.0*np.sin(t)

dt =  0.01
start   = -2.0*np.pi
end     =  2.0*np.pi

# 横軸 t の作成．-6.28 から 6.28 を 0.01 おきに．t は横ベクトル．
t = np.arange(start, end, dt)

s = f(t)

for i in range(t.size): # この 2 行でデータを表示．なくても動く．
    print(f'{t[i]:.5f}'+'\t'+f'{s[i]:.5f}')

fig=plt.figure(0)
plt.plot (t, s, linewidth=1.0, color="r",linestyle="solid",label="$ 2sin t $")
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
fig.savefig('fig321.pdf')
```

これを走らせると，

```
% python ./p001.py
-6.28319 0.00000
-6.27319 0.01000
-6.26319 0.02000
-6.25319 0.03000
-6.24319 0.03999
-6.23319 0.04998
-6.22319 0.05996
-6.21319 0.06994
....
```

と，2 列でデータが出力される（左側の数字が横軸 t の値，右側が縦軸 $f(t)$ の値）．

```
% python fse101.py
% evince fig321.pdf
```

とすると，グラフが表示される（evince は，適当な pdf 表示コマンドに置き換えよ）．これは関数 $f(t)$ を，$f(t) \approx 2\sin t$ と式（6）の右辺第一項目だけで近似した結果である．

演習 2：横軸の範囲を $-2\pi \leqq t < 2\pi$ にとり，$f^K(t) = 2\left(\sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kt\right)$ のグラフを作図せよ．ここで K の値は， $K = 3, 5, 10, 100$ など，適当な値を数通り選べばよい．ソースコードは，第 K 項目までを考えるには，fse101.c を次のように変更すればよいだろう．

fse102.c

```
# -*- coding: utf-8 -*-
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(t,k):
    return 2.0*np.power(-1.0,k+1)*np.sin(k*t)/k

dt =  0.01
start   = -2.0*np.pi
end     =  2.0*np.pi

# 横軸 t の作成．-6.28 から 6.28 を 0.01 おきに．t は横ベクトル．
t = np.arange(start, end, dt)

K=3
s3 = 0*t   #  0*t で 要素がすべて 0 の 1257 次元ベクトルを作成．t.size = 1257．
for k in range(K):
    s3 = s3 + f(t,k+1)  # k+1 にしているのは，ranng(K) は {0,1,...,K-1} のため．

K=10
s10 = 0*t
for k in range(K):
    s10 = s10 + f(t,k+1)

K=100
s100 = 0*t
for k in range(K):
    s100 = s100 + f(t,k+1)

fig=plt.figure(0)
plt.plot (t, s3, linewidth=1.0, color="r",linestyle="solid",label="$ K=3 $")
plt.plot (t, s10, linewidth=1.0, color="g",linestyle="solid",label="$ K=10 $")
plt.plot (t, s100, linewidth=1.0, color="b",linestyle="solid",label="$ K=100 $")
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
fig.savefig('fig322.pdf')
```

```
% python fse102.py
% evince fig322.pdf
```

$K = 3, 10, 100$ で実行して，それらの結果を重ねたものを図 1 に示す.

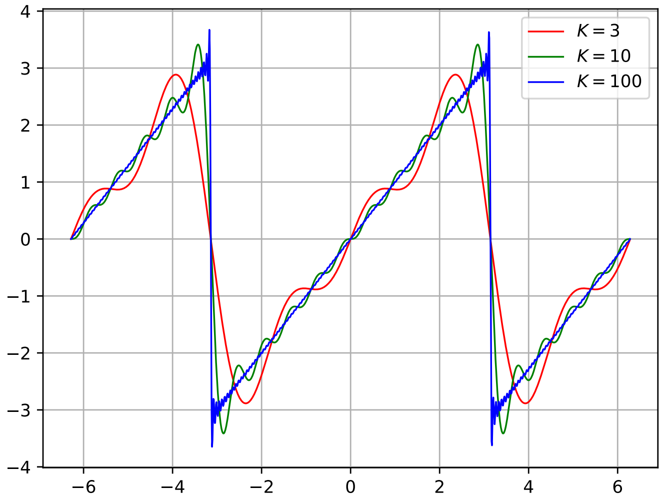

図 1: のこぎり波のフーリエ級数展開. $f(t)$ を式（6）の右辺，第 3 項目まで（$K = 3$），第 10 項目まで（$K = 10$），第 100 項目まで（$K = 100$），を求めて，それぞれ近似して表現した結果.

レポート課題 1：周期 2π の関数

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} 1, & -\pi \leqq t < 0 \\ 0, & 0 \leqq t < \pi \end{cases} \tag{7}$$

のグラフを手で描き，フーリエ級数を求めよ.
※注意点：この課題だけは手書きしたもの（ A4 1 枚程度）を提出すること．フーリエ級数を求めるには，まず，フーリエ係数 a_k, b_k を計算し，$f(t)$ を式（6）のように $f(t) \approx \cdots\cdots$ と，適当な項まで表現すればよい．式（7）では，区間 $-\pi \leqq t < \pi$ でしか $f(t)$ の値を定義していないが,「周期 2π の関数」という意味は $f(t) = f(t + 2k\pi), k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ であるので，$f(t)$ は $-\infty < t < \infty$ で定義されている.

レポート課題 2：式（7）で定義された周期 2π の関数 $f(t)$ について，フーリエ級数展開した結果を図で示せ．図 1 のように，K の値を数通り試すこと．レポートには，単に図を貼り

付けるだけでなく，必ず考察を書き加えること．

レポート課題 3：周期 2π の関数

$$f(t) \;=\; t^2, \quad -\pi \leqq t < \pi \tag{8}$$

について，前問同様，フーリエ級数展開した図を作成し，考察せよ．ここで関数 $f(t)$ を第 K 項目までのフーリエ級数展開した計算すると

$$f(t) \;\approx\; f^K(t) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{K}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kt \tag{9}$$

になる（計算は講義ノート参照）．

レポート課題 4：課題 1，3 のそれぞれの関数 $f(t)$ について，$f(t)$ とフーリエ級数展開 $f^K(t)$ との近似誤差を求めよ（教科書 5.7 節．図 5.17 付近に解説あり）．

$f^K(t)$ は，フーリエ級数展開の項数 K が増えるにしたがい，もとの関数 $f(t)$ に近づいていく，$f(t) \approx f^K(t)$．ここまでの課題で，このことは確認できたと思う．ただし，あくまで $f(t) \approx f^K(t)$ であり，$f(t) = f^K(t)$ とピッタリ一致するわけではない．誤差がある．この近似誤差は，K の値が大きくなるにしたがい，ゼロに近づいていくだろうか．近づいていく場合，どういうスピードでゼロに近づくか，これを調べてみよう．近似の善し悪しは，横軸に K，縦軸に．基本周期分（上記の例題では 2π）の区間で，$f(t)$ と $f^K(t)$ との距離 $d(f, f^K)$ をプロットすると分かりやすい．距離は，公理（対称性など）を満たせば，どういう指標を使ってもよい．たとえばユークリッド距離

$$d(f, f^K) \;=\; \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}(f_i - f_i^K)^2} \tag{10}$$

などでよい[5]．ここで関数 $f(t)$ は，コンピュータ上では離散的に切り刻んで扱われているので n 次元ベクトル $f(t) \approx \boldsymbol{f} = (f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})^\top$ である．区間 $-\pi \approx -3.14 \leqq t < \pi \approx 3.14$ を $\Delta t = 0.01$ で離散化した場合，$n = 629$ となる．

あまりに教えすぎると，自分でなにもできなくなる恐れがあるが，演習 1 で扱った $f(t) = t$ の場合について，近似の良さを調べる例を示しておく．Python では，ベクトルのノルムを計算する関数が（numpy に）あらかじめ用意されている．`np.linalg.norm(s-t, ord=2)` で，ノルムを計算している．

[5] これを $\Delta t = 0.01$ 倍したものでもよい

fse103.c

```
# -*- coding: utf-8 -*-
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def func(t,k):
    return 2.0*np.power(-1.0,k+1)*np.sin(k*t)/k

def diff(K):
    dt =  0.01
    start   = -1.0*np.pi
    end     =  1.0*np.pi
    t = np.arange(start, end, dt)
    s = 0*t
    for k in range(1,K):
      s = s + func(t,k)
    return np.linalg.norm(s-t, ord=2) # ノルムの計算

# maxK = np.arange(-np.pi, np.pi, 0.01).size
maxK = 100
K = np.arange(1,maxK, 1)
r = []
for k in range(1,maxK):
  r.append( diff(k) )

fig=plt.figure(0)
plt.plot (K, r, linewidth=1.0, color="r",linestyle="solid",label="$ f(t)=t $")
plt.xlabel("$K$-th approximation", fontsize=14, color="black")
plt.ylabel("error", fontsize=14)
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
fig.savefig('fig323.pdf')
```

レポート課題 5：(A4 一枚程度)

フーリエ級数について理解が深まっただろうか．頭の中が???だらけになっているかもしれない．フーリエ級数について，理解できた点，理解できない点・疑問点などを，少なくとも 3 つ程度，具体的に箇条書きし，それぞれの項目について考察せよ．レポートの最後には，感想を記述してほしい．このプリント中に理解しにくい点があった場合は，何ページ何行目の，どこの部分が分かりにくかったか，具体的に，指摘してほしい．

注意事項：

1. レポートの LaTeX を使った簡単な書き方は http://www.cs.miyazaki-u.ac.jp/~date/lectures/latex/latexreport.html を参照．
2. LaTeX は演習室のパソコンでもいいが，クラウド上の Overleaf は使いやすい（便利．登録が必要）：https://www.overleaf.com/
3. 評価は，レポートに書かれている内容,「1. 何を調べようとしているのか（目的），2. 得られた結果（図）とその説明，3. 考察」で判断します．特に，考察，感想は，型通りではなく，他人とは違う内容を書こうとしているかを見ます．
4. レポートは，1 年前の自分が読んでも分かるように書けていれば OK （簡単ではない）．
5. 独力で課題が遂行できそうにない場合は，早めに相談すること．